第7讲：时频分析

李国林

清华大学电子工程系

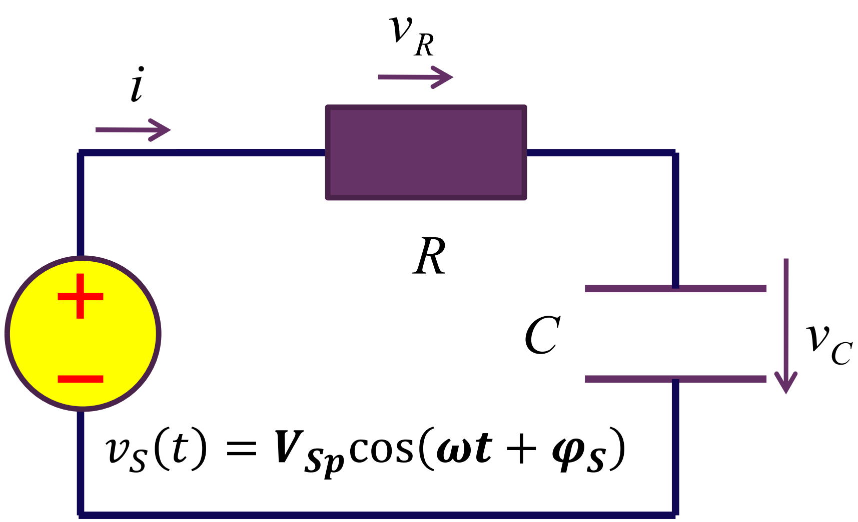
B班课程内容安排

第一学期：线性	序号	第二学期：非线性
电路定律	1	器件基础
电阻电源	2	二极管
电容电感	3	MOSFET
信号分析	4	BJT
分压分流	5	反相电路
正弦稳态	6	数字门
时频特性	7	放大器
期中复习	8	期中复习
RLC二阶	9	负反馈
二阶时频	10	差分放大
受控源	11	频率特性
网络参量	12	正反馈
典型网络	13	振荡器
作业选讲	14	作业选讲
期末复习	15	期末复习

时频分析 内容

- RC分压分析
  - 直流激励
  - 阶跃激励
  - 正弦激励
  - 冲激激励
    - 传递函数
    - 冲激响应、阶跃响应
      - 时频分析
  - 方波激励
    - 从方波响应看低通、高通

一、正弦激励回顾



$v_S(t) = V_{Sp}\cos(\omega t + \varphi_S)$

$$Z_{in} = R + \frac{1}{j\omega C}$$

$$\dot{I} = \frac{\dot{V}_S}{Z_{in}}$$

$$\dot{V}_R = R\dot{I} = \frac{R}{Z_{in}}\dot{V}_S = \frac{R}{R+\frac{1}{j\omega C}}\dot{V}_S$$

$$= \frac{j\omega RC}{1+j\omega RC}\dot{V}_S$$

$$= \frac{\omega RC}{\sqrt{1+(\omega RC)^2}}e^{j\left(\frac{\pi}{2}-\arctan\omega RC\right)}\dot{V}_S$$

$$v_R(t) = \frac{\omega RC}{\sqrt{1+(\omega RC)^2}}V_{Sp}\cos\left(\omega t + \varphi_S + \frac{\pi}{2} - \arctan\omega RC\right)$$

$$= -\frac{\omega RC}{\sqrt{1+(\omega RC)^2}}V_{Sp}\sin(\omega t + \varphi_S - \arctan\omega RC)$$

$$\dot{V}_C = \frac{1}{j\omega C}\dot{I} = \frac{\frac{1}{j\omega C}}{Z_{in}}\dot{V}_S = \frac{\frac{1}{j\omega C}}{R+\frac{1}{j\omega C}}\dot{V}_S$$

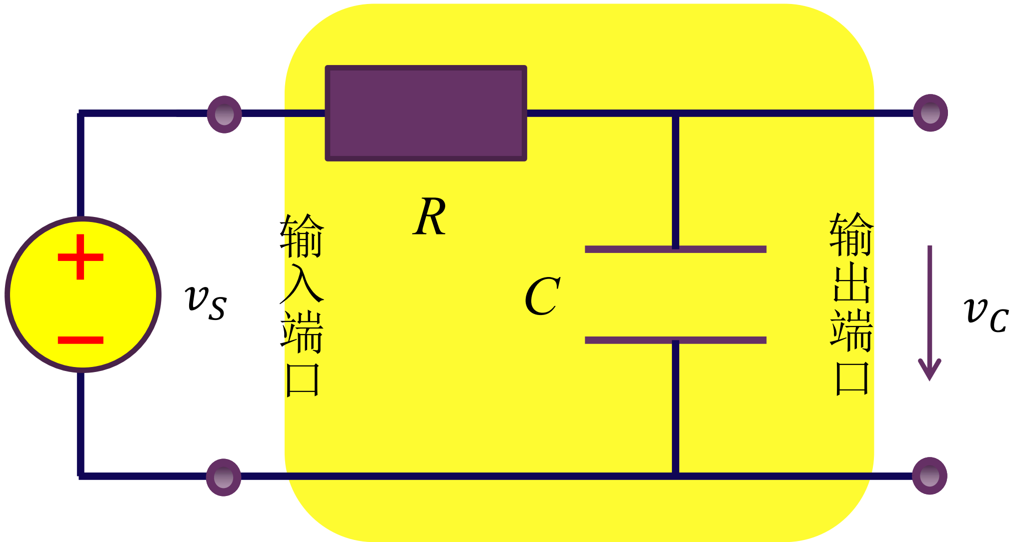
$$= \frac{1}{1+j\omega RC}\dot{V}_S$$

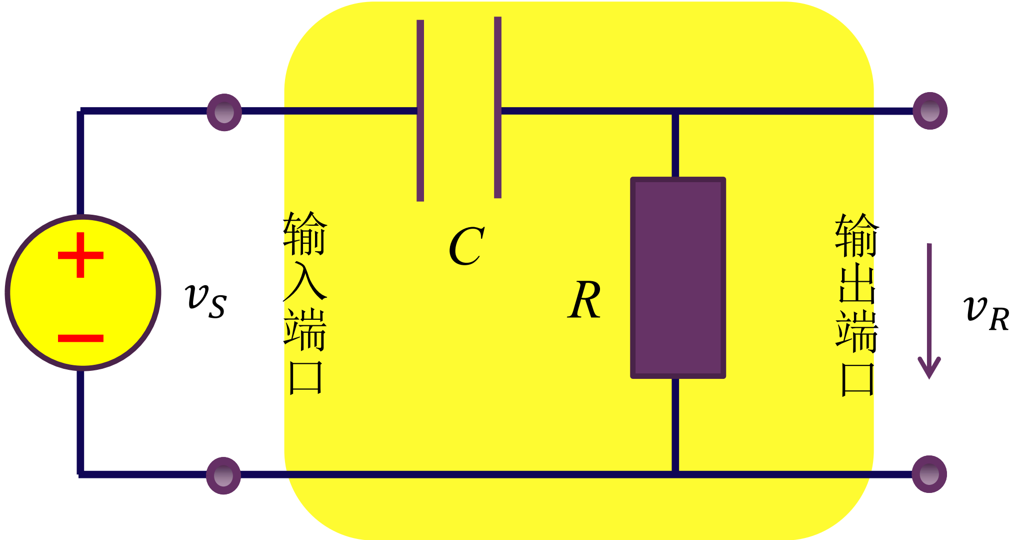
$$= \frac{1}{\sqrt{1+(\omega RC)^2}}e^{-j\arctan\omega RC}\dot{V}_S$$

$$v_C(t) = \frac{1}{\sqrt{1+(\omega RC)^2}}V_{Sp}\cos(\omega t + \varphi_S - \arctan\omega RC)$$

同学可自行验证**KVL**： $v_C(t) + v_R(t) = v_S(t)$

从二端口网络视角看分压





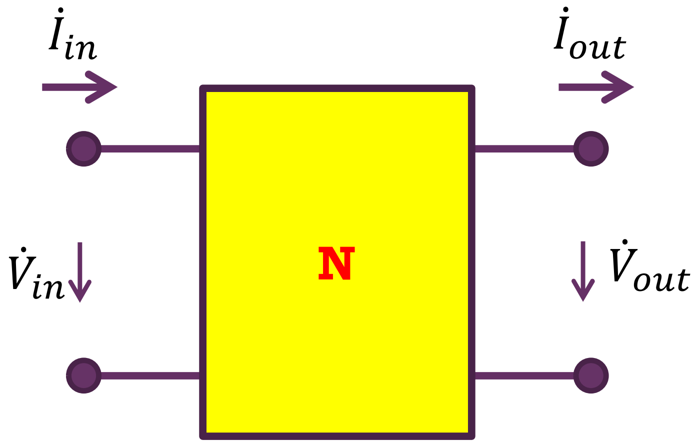
二端口网络

- 二端口网络是电路中最常见的网络
  - 单入单出信号处理系统的基本模型
    - 一个输入端口，一个输出端口：激励信号或能量自输入端口进入，经二端口网络处理后自输出端口输出，形成对后级电路的激励
      - 不做特别说明时，一般默认端口1为输入端口，端口2为输出端口

端口1接受源的激励，视为阻，按电阻关联参考方向定义v_{in}、i_{in}

端口2输出信号，视为源，可驱动负载，按电源关联参考方向定义v_{out}、i_{out}

线性时不变网络（LTI）的传递函数



对二端口网络最感兴趣的参量是传递函数

$$H = \frac{\dot{S}_{out}}{\dot{S}_{in}}$$

电压传递函数

跨导传递函数

跨阻传递函数

电流传递函数

一般是相量域定义的传递函数

从放大器角度称传递函数为增益（或放大倍数）

$$A_{v0} = \left.\frac{\dot{V}_{out}}{\dot{V}_{in}}\right|_{\dot{I}_{out}=0}$$

本征电压增益

$$G_{m0} = \left.\frac{\dot{I}_{out}}{\dot{V}_{in}}\right|_{\dot{V}_{out}=0}$$

本征跨导增益

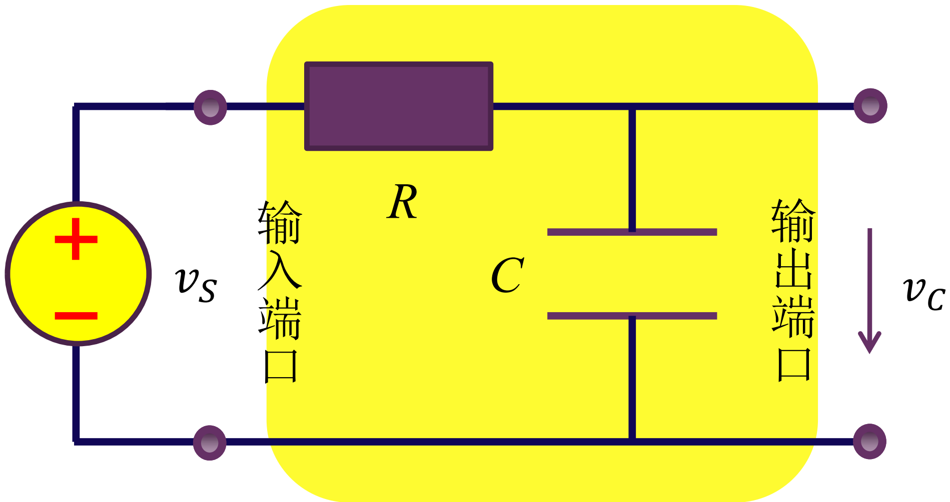
$$R_{m0} = \left.\frac{\dot{V}_{out}}{\dot{I}_{in}}\right|_{\dot{I}_{out}=0}$$

本征跨阻增益

$$A_{i0} = \left.\frac{\dot{I}_{out}}{\dot{I}_{in}}\right|_{\dot{V}_{out}=0}$$

本征电流增益

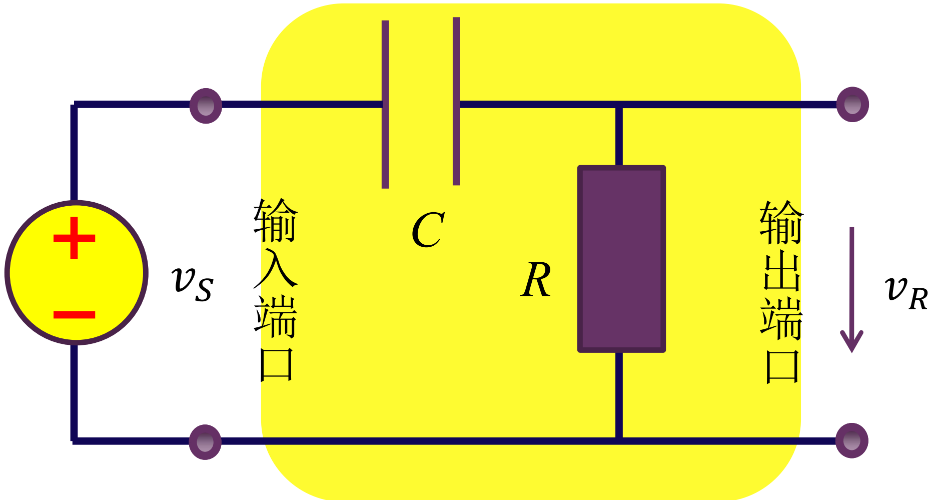
RC分压网络的电压传递函数



$$H_{v_C}(j\omega)=\frac{\dot{V}_C(j\omega)}{\dot{V}_S(j\omega)}=\frac{\frac{1}{j\omega C}}{R+\frac{1}{j\omega C}}$$

$$=\frac{1}{1+j\omega RC}=\frac{1}{\sqrt{1+(\omega RC)^2}}e^{-j\mathrm{arctan}\omega RC}$$

$$=A(\omega)e^{j\varphi(\omega)}$$

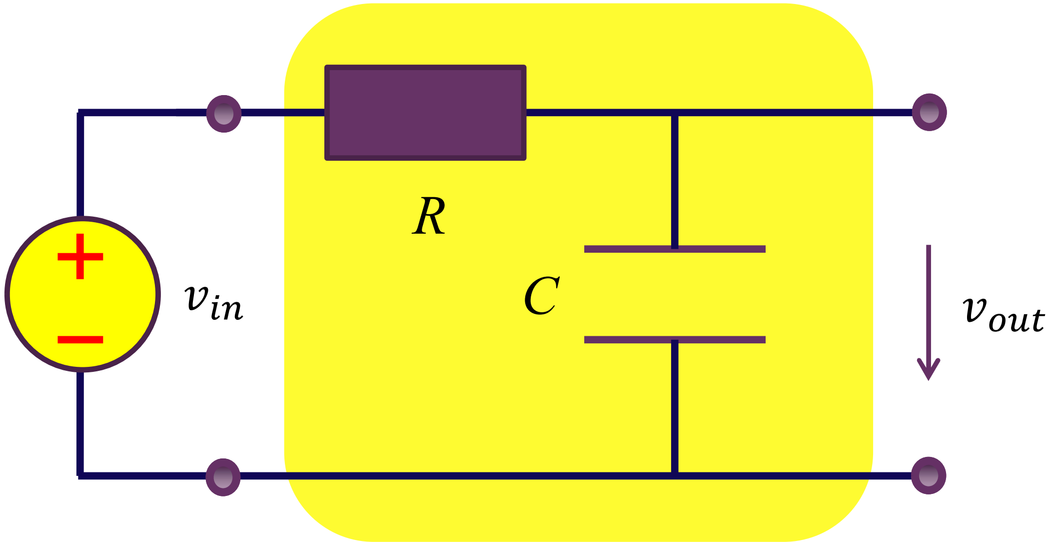


$$H_{v_R}(j\omega)=\frac{\dot{V}_R(j\omega)}{\dot{V}_S(j\omega)}=\frac{R}{R+\frac{1}{j\omega C}}$$

$$=\frac{j\omega RC}{1+j\omega RC}=\frac{\omega RC}{\sqrt{1+(\omega RC)^2}}e^{j\left(\frac{\pi}{2}-\mathrm{arctan}\omega RC\right)}$$

$$=A(\omega)e^{j\varphi(\omega)}$$

传递函数的幅频特性和相频特性



$$H(j\omega)=\frac{\dot{V}_{out}(j\omega)}{\dot{V}_{in}(j\omega)}=\frac{\frac{1}{j\omega C}}{R+\frac{1}{j\omega C}}$$

$$=\frac{1}{1+j\omega RC}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{1+(\omega RC)^2}}e^{-j\arctan\omega RC}$$

$$=A(\omega)e^{j\varphi(\omega)}$$

$$A(\omega)=\frac{1}{\sqrt{1+(\omega RC)^2}}$$ 幅频特性

$$\varphi(\omega)=-\arctan\omega RC$$ 相频特性

10

电容分压
幅频特性和相频特性

$$\omega_0 = \frac{1}{\tau} = \frac{1}{RC}$$

$$A(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega RC)^2}}$$

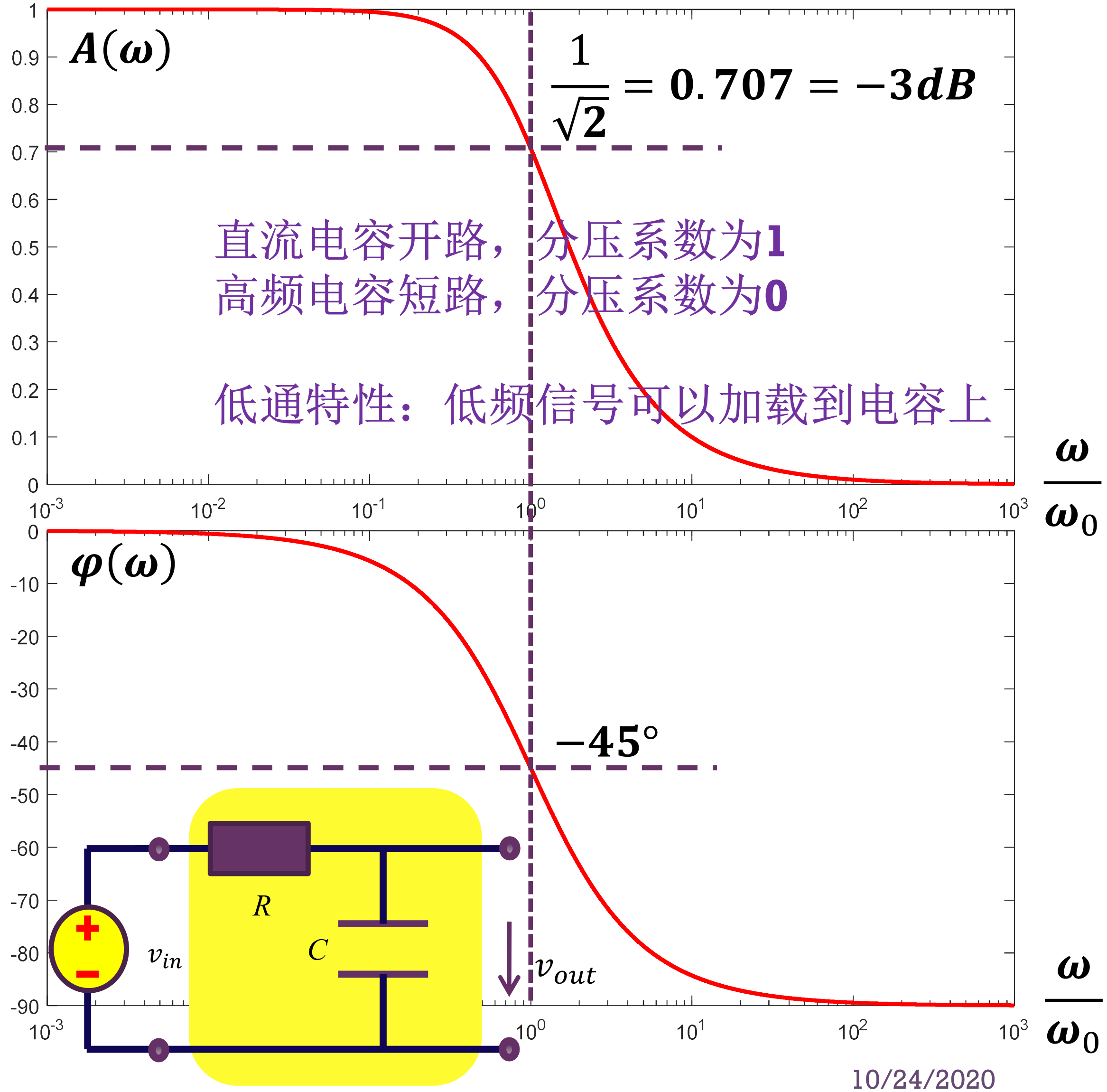
$$= \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega\tau)^2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}}$$

$$\varphi(\omega) = -\arctan\omega RC$$

$$= -\arctan\omega\tau$$

$$= -\arctan\frac{\omega}{\omega_0}$$



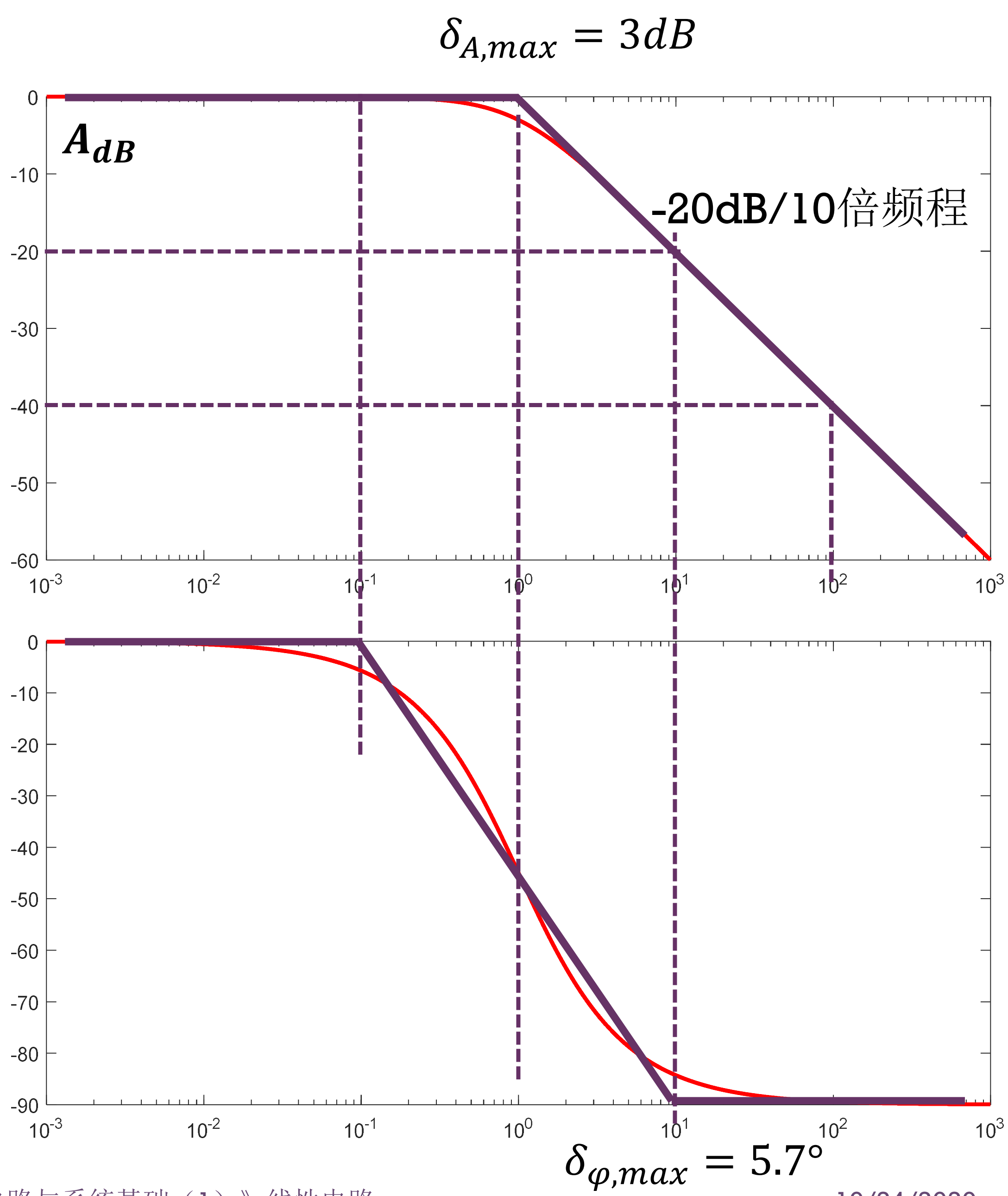
伯特图

$$A(\omega)=\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}}$$

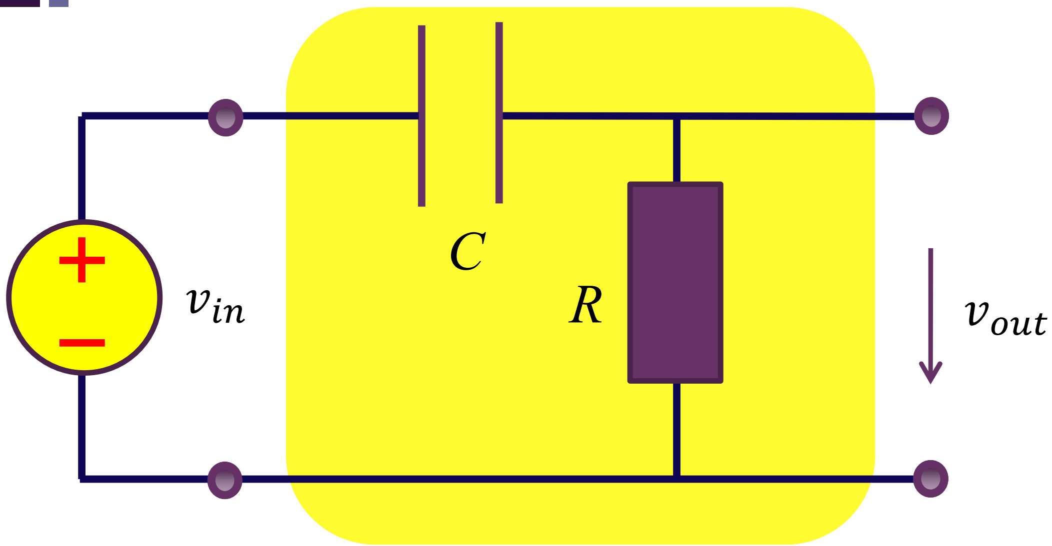
$$A_{dB}(\omega)=20\log_{10}A(\omega)$$

$$\approx\begin{cases}0 & \omega<\omega_0\\ 20\log_{10}\frac{\omega_0}{\omega} & \omega>\omega_0\end{cases}$$

伯特图：幅频特性和相频特性的分段折线描述



电阻分压的幅频特性和相频特性



$$H_{v_R}(j\omega)=\frac{\dot{V}_{out}(j\omega)}{\dot{V}_{in}(j\omega)}=\frac{R}{R+\frac{1}{j\omega C}}$$

$$=\frac{j\omega RC}{1+j\omega RC}$$

$$=\frac{\omega RC}{\sqrt{1+(\omega RC)^2}}e^{j\left(\frac{\pi}{2}-\mathrm{arctan}\omega RC\right)}$$

$$=A(\omega)e^{j\varphi(\omega)}$$

$$A(\omega)=\frac{\omega RC}{\sqrt{1+(\omega RC)^2}}$$ 幅频特性

$$\varphi(\omega)=\frac{\pi}{2}-\mathrm{arctan}\omega RC$$ 相频特性

电阻分压
幅频特性和相频特性

$$\omega_0 = \frac{1}{\tau} = \frac{1}{RC}$$

$$A(\omega) = \frac{\omega RC}{\sqrt{1 + (\omega RC)^2}}$$

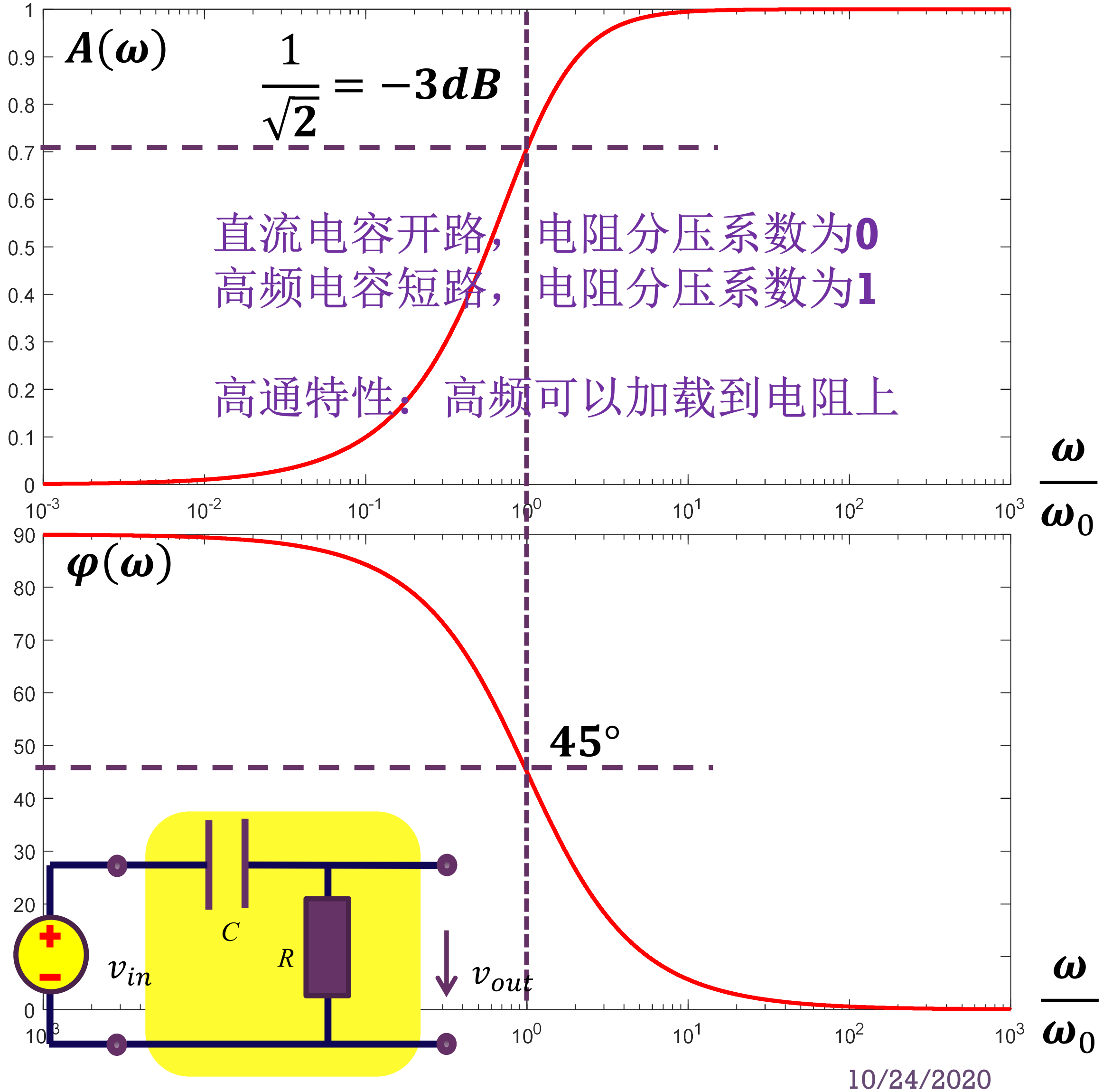
$$= \frac{\omega\tau}{\sqrt{1 + (\omega\tau)^2}}$$

$$= \frac{\frac{\omega}{\omega_0}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}}$$

$$\varphi(\omega) = \frac{\pi}{2} - \arctan\omega RC$$

$$= \frac{\pi}{2} - \arctan\omega\tau$$

$$= \frac{\pi}{2} - \arctan\frac{\omega}{\omega_0}$$



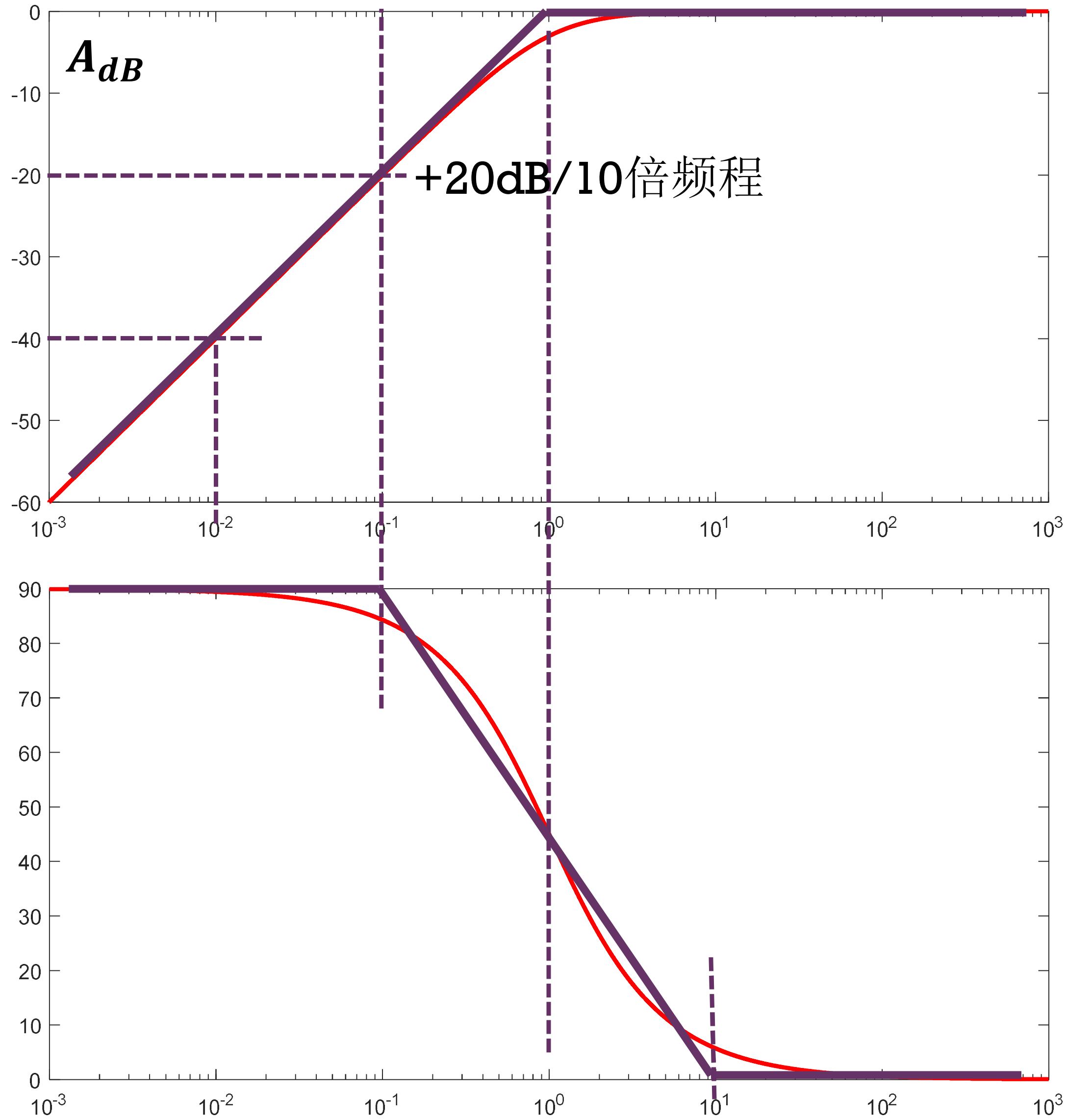
伯特图

$$A(\omega) = \frac{\dfrac{\omega}{\omega_0}}{\sqrt{1 + \left(\dfrac{\omega}{\omega_0}\right)^2}}$$

$$A_{dB}(\omega) = 20\log_{10} A(\omega)$$

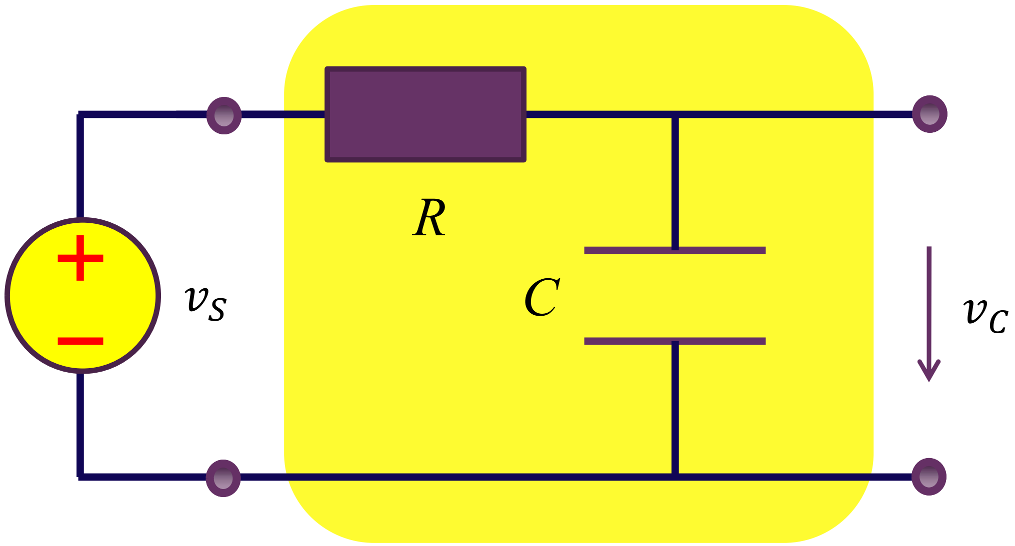
$$\approx \begin{cases} 20\log_{10}\dfrac{\omega}{\omega_0} & \omega < \omega_0 \\ 0 & \omega > \omega_0 \end{cases}$$

$\delta_{A,max} = 3dB$



$\delta_{\varphi,max} = 5.7°$

RC分压网络：一阶低通/高通滤波器



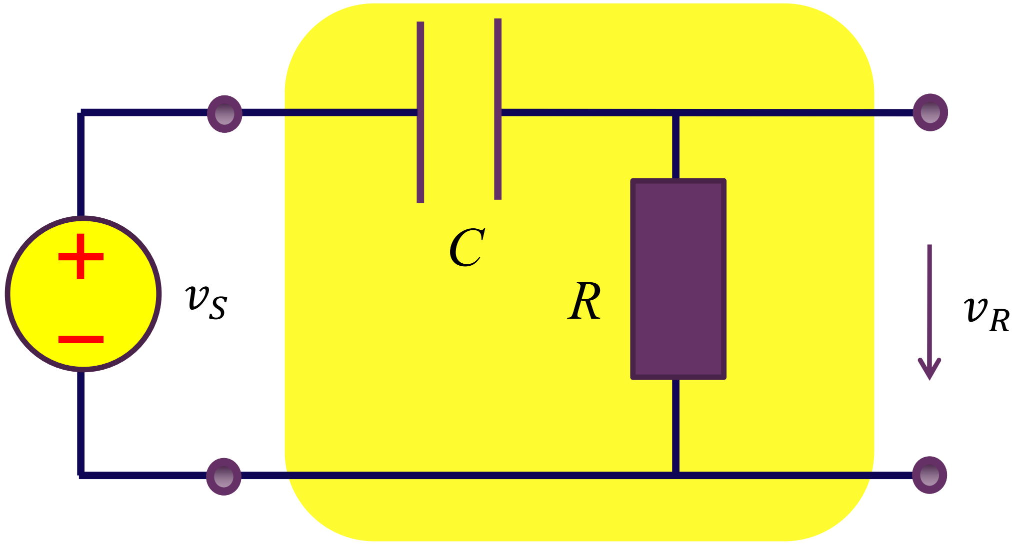
$$H_{v_C}=\frac{\frac{1}{j\omega C}}{R+\frac{1}{j\omega C}}=\frac{1}{1+j\omega\tau}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{1+(\omega\tau)^2}}e^{-j\arctan\omega\tau}$$

$$BW_{3dB}=\frac{1}{2\pi\tau}$$

$$\tau=RC \qquad \omega_0=\frac{1}{\tau}$$

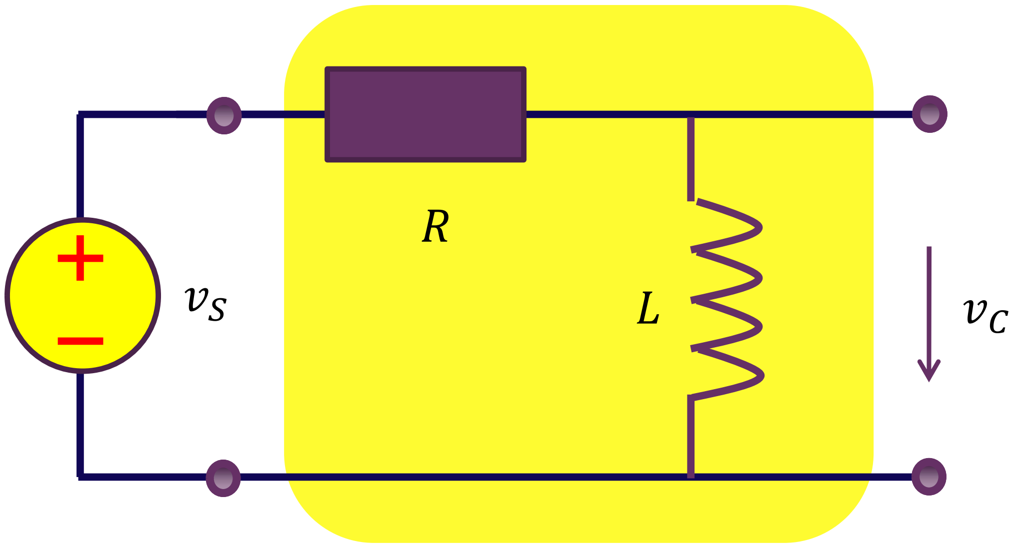
$$f_{3dB}=\frac{1}{2\pi\tau}$$

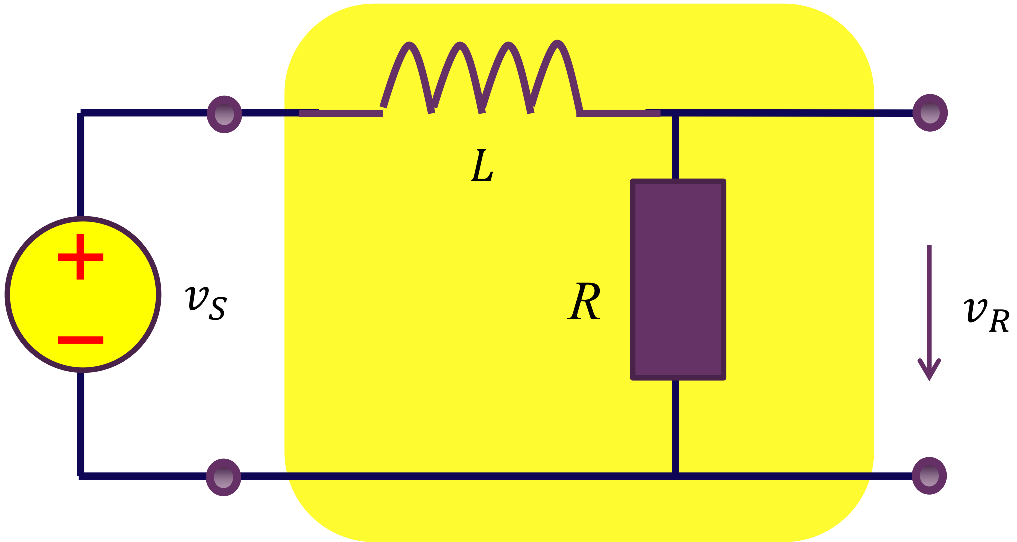


$$H_{v_R}=\frac{R}{R+\frac{1}{j\omega C}}=\frac{j\omega\tau}{1+j\omega\tau}$$

$$=\frac{\omega\tau}{\sqrt{1+(\omega\tau)^2}}e^{j\left(\frac{\pi}{2}-\arctan\omega\tau\right)}$$

RL分压网络：一阶低通/高通滤波器





$$\boldsymbol{H_{v_L} = \frac{j\omega L}{R + j\omega L} = \frac{j\omega GL}{1 + j\omega GL}}$$

$$\boldsymbol{= \frac{j\omega\tau}{1 + j\omega\tau}}$$

典型一阶高通传递函数

$$f_{3dB} = \frac{1}{2\pi\tau}$$

$$\boldsymbol{\tau = GL} \quad \boldsymbol{\omega_0} = \frac{1}{\boldsymbol{\tau}}$$

$$BW_{3dB} = \frac{1}{2\pi\tau}$$

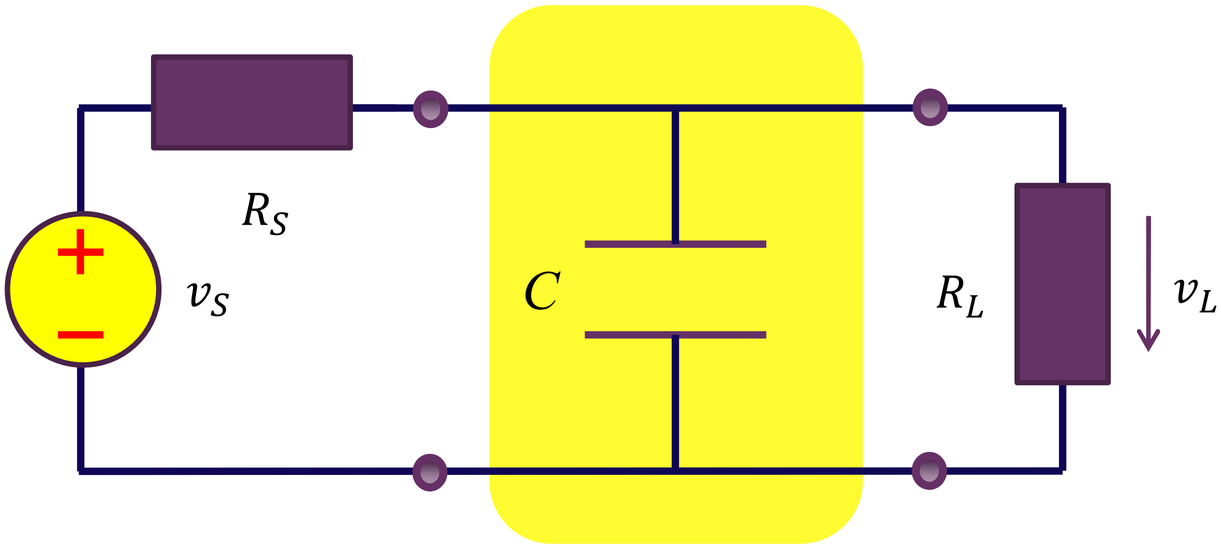
$$\boldsymbol{H_{v_R} = \frac{R}{R + j\omega L} = \frac{1}{1 + j\omega GL}}$$

$$\boldsymbol{= \frac{1}{1 + j\omega\tau}}$$

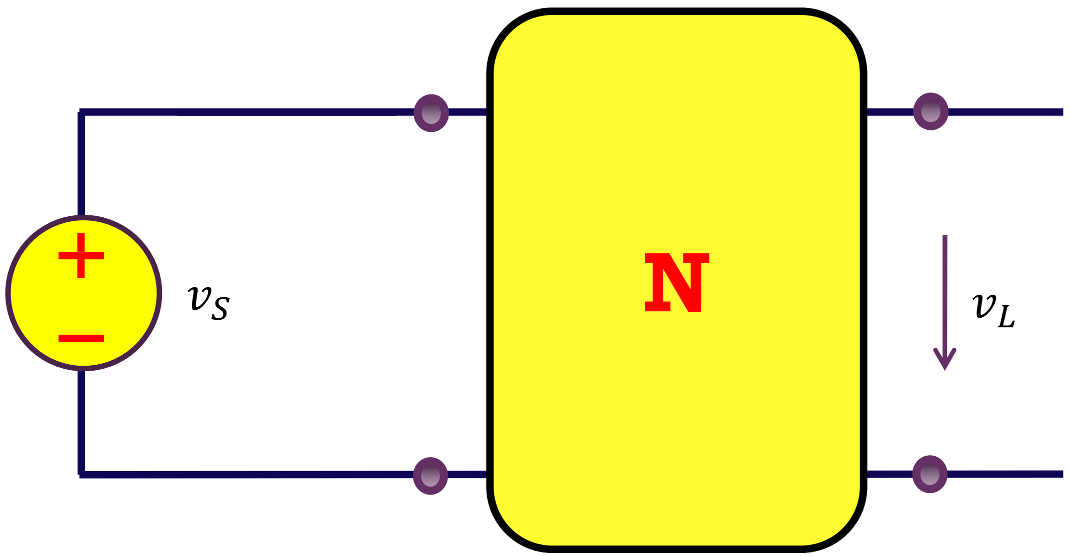
典型一阶低通传递函数

例1 一阶系统传递函数的一般形式

- 如图所示，这是一个一阶低通滤波器，请分析其3dB通带



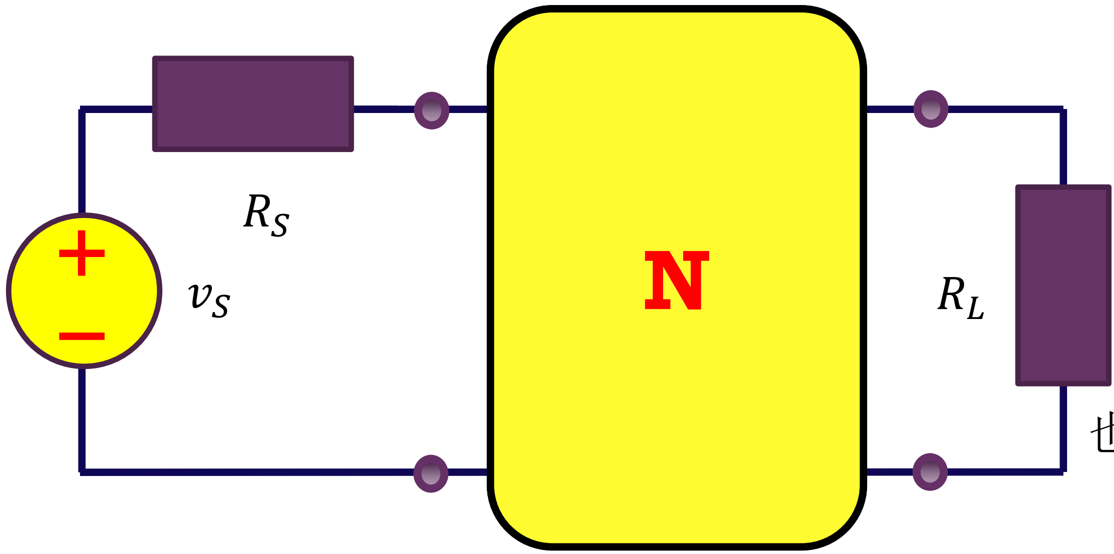
传递函数定义 电压传递函数例



没有信源内阻负载电阻的情况

采用一般性定义：
本征电压增益定义

$$H(j\omega)=\frac{\dot{V}_L(j\omega)}{\dot{V}_S(j\omega)}=A_{v0}(j\omega)$$



有信源内阻和负载电阻情况
可采用一般性定义

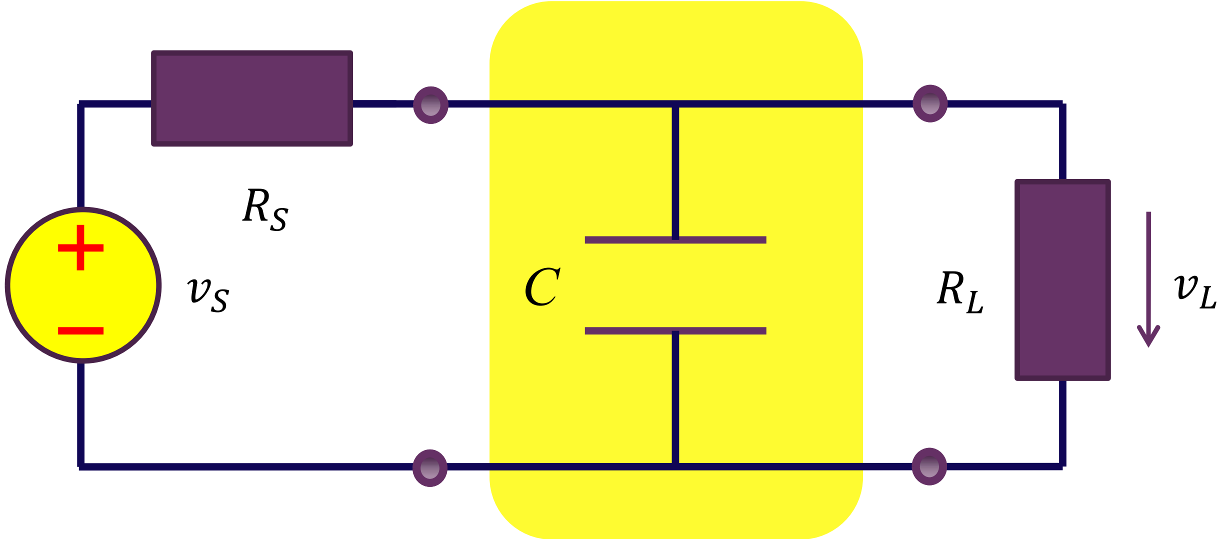
$$H(j\omega)=\frac{\dot{V}_L(j\omega)}{\dot{V}_S(j\omega)}$$

也可采用基于功率传输的定义

$$H(j\omega)=2\sqrt{\frac{R_S}{R_L}}\frac{\dot{V}_L(j\omega)}{\dot{V}_S(j\omega)}$$

$$|H(j\omega)|^2=4\frac{R_S}{R_L}\frac{\left|\dot{V}_L(j\omega)\right|^2}{\left|\dot{V}_S(j\omega)\right|^2}=\frac{\left|\dot{V}_L(j\omega)\right|^2/2R_L}{\left|\dot{V}_S(j\omega)\right|^2/8R_S}=\frac{P_L(j\omega)}{P_{S,max}(j\omega)}=G_T(j\omega)$$

电压传递函数的一般性定义

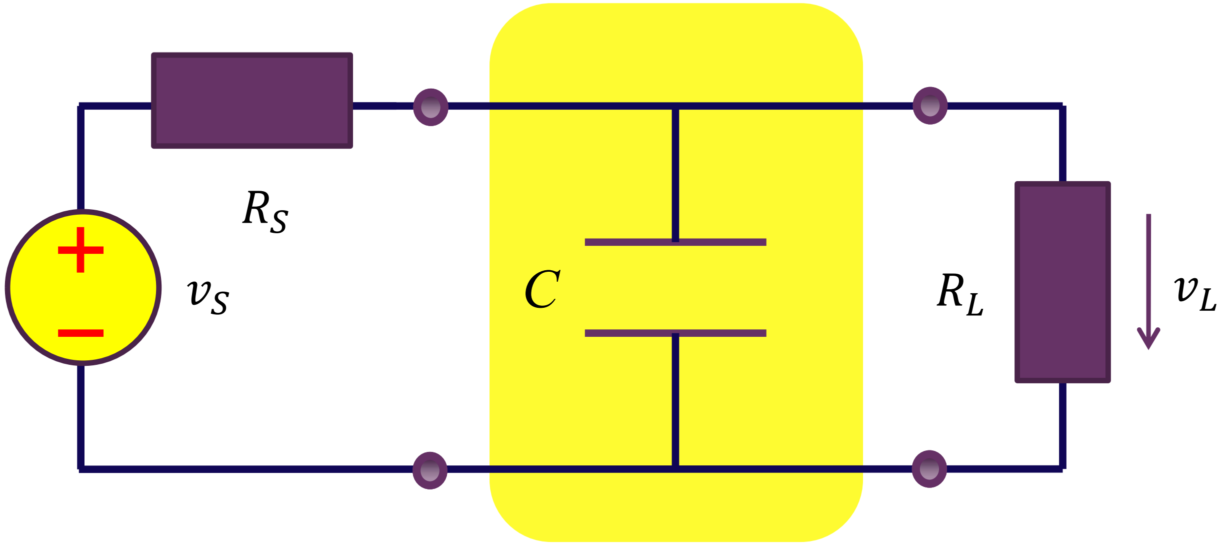


$$H(j\omega)=\frac{\dot{V}_L(j\omega)}{\dot{V}_S(j\omega)}=\frac{\dfrac{1}{\dfrac{1}{R_L}+j\omega C}}{R_S+\dfrac{1}{\dfrac{1}{R_L}+j\omega C}}=\frac{\dfrac{R_L}{1+j\omega R_L C}}{R_S+\dfrac{R_L}{1+j\omega R_L C}}=\frac{R_L}{R_S(1+j\omega R_L C)+R_L}$$

$$=\frac{R_L}{(R_S+R_L)+j\omega R_S R_L C}=\frac{R_L}{R_S+R_L}\frac{1}{1+j\omega\dfrac{R_S R_L}{R_S+R_L}C}=H_0\frac{1}{1+j\omega\tau}$$

$$H_0=\frac{R_L}{R_S+R_L}\qquad \tau=RC\qquad R=\frac{R_S R_L}{R_S+R_L}$$

推导易出错，直接写答案



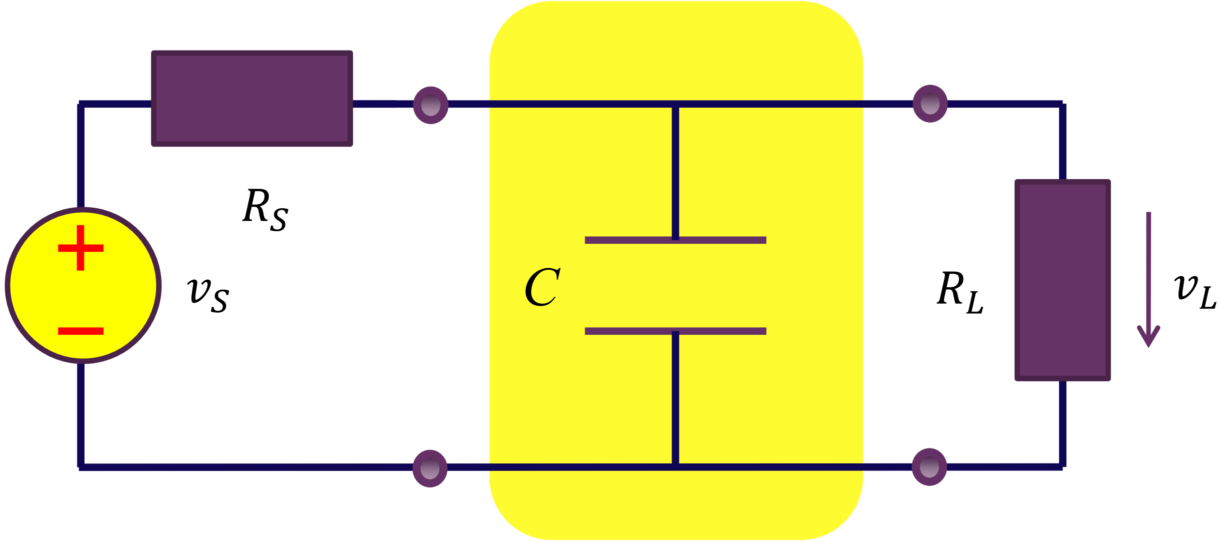
1/判断这是一个一阶低通，一阶低通的典型传函形式为 $H(j\omega)=\dfrac{\dot{V}_L(j\omega)}{\dot{V}_S(j\omega)}=H_0\dfrac{1}{1+j\omega\tau}$

2/典型传函中的关键参量H_0代表中心频点的传递系数 $H_0=H(j0)=\dfrac{\dot{V}_L(j0)}{\dot{V}_S(j0)}=\dfrac{R_L}{R_S+R_L}$

3/典型传函中的关键参量τ=RC，R为C看到的等效电阻（驱动电容的戴维南内阻）

4/给出最终结论： $BW_{3dB}=\dfrac{1}{2\pi\tau}$ 其中 $\tau=RC$ $R=\dfrac{R_SR_L}{R_S+R_L}$

基于功率传输的传递函数



$$H(j\omega)=2\sqrt{\frac{R_S}{R_L}}\frac{\dot{V}_L(j\omega)}{\dot{V}_S(j\omega)}=2\sqrt{\frac{R_S}{R_L}}\frac{R_L}{R_S+R_L}\frac{1}{1+j\omega\frac{R_SR_L}{R_S+R_L}C}=H_0\frac{1}{1+j\omega\tau}$$

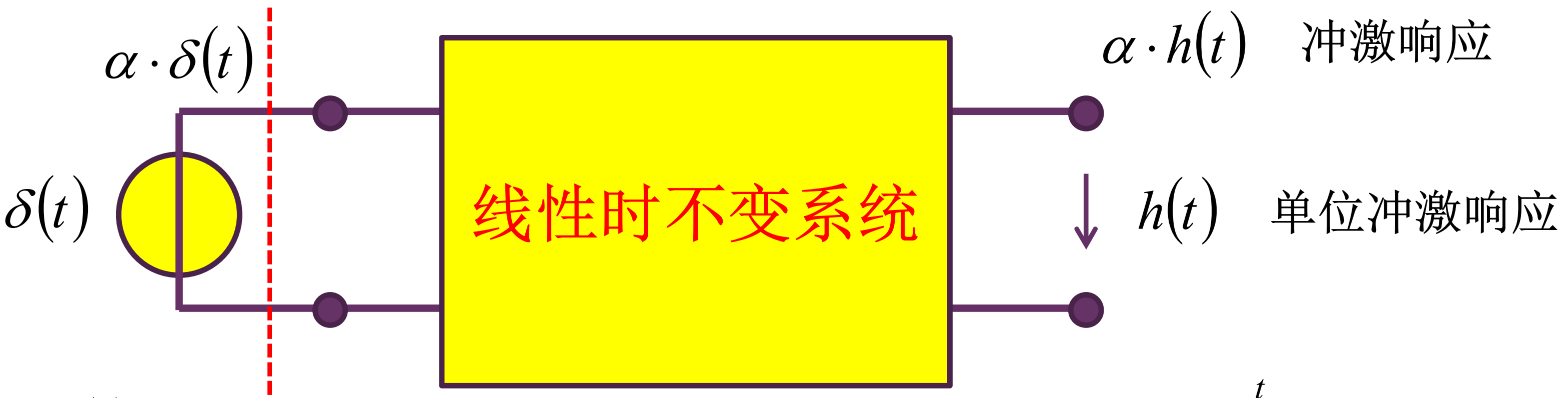
$$H_0=\frac{2\sqrt{R_SR_L}}{R_S+R_L}\qquad \tau=RC\qquad R=\frac{R_SR_L}{R_S+R_L}$$

$$BW_{3dB}=\frac{1}{2\pi\tau}$$

不同的传函定义不会改变通带，只改变H_0

前者是零频点分压系数，后者的平方为零频点的功率传输系数

二、阶跃响应和冲激响应



$$\int_{-\infty}^{t}\delta(\tau)d\tau=U(t)$$

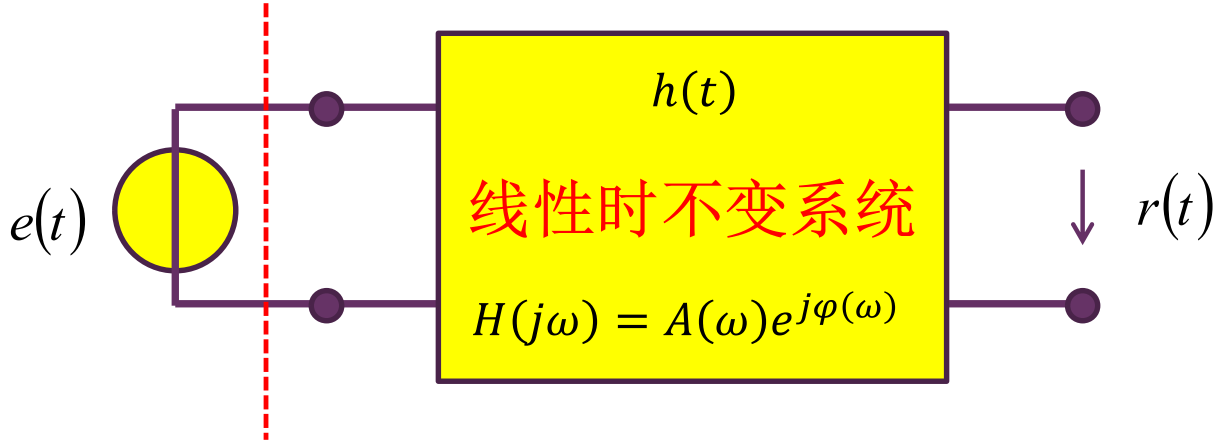
$$\frac{d}{dt}U(t)=\delta(t)$$

线性时不变系统在零状态下
单位阶跃激励的响应为阶跃响应
单位冲激激励的响应为冲激响应

$$\int_{-\infty}^{t}h(\tau)d\tau=g(t)$$

$$\frac{d}{dt}g(t)=h(t)$$

冲激响应的傅里叶变换为传递函数



$$H(j\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty} h(t)\,e^{-j\omega t}dt$$

传递函数（频域响应）恰好就是冲激响应（时域响应）的傅立叶变换，传递函数和冲激响应是一对傅里叶变换对，两者对**LTI**系统的描述是不同视角的等同描述

$r(t)=f(e(t)) \quad \Longleftrightarrow \quad \dot{R}(j\omega)=H(j\omega)\dot{E}(j\omega)$

$e(t)=\delta(t) \xrightarrow{r=f(e)} r(t)=h(t)$

$E(j\omega)=\mathcal{F}_e(j\omega)$

$=\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t)\,e^{-j\omega t}dt$

$=1=\mathcal{F}_\delta(j\omega)$

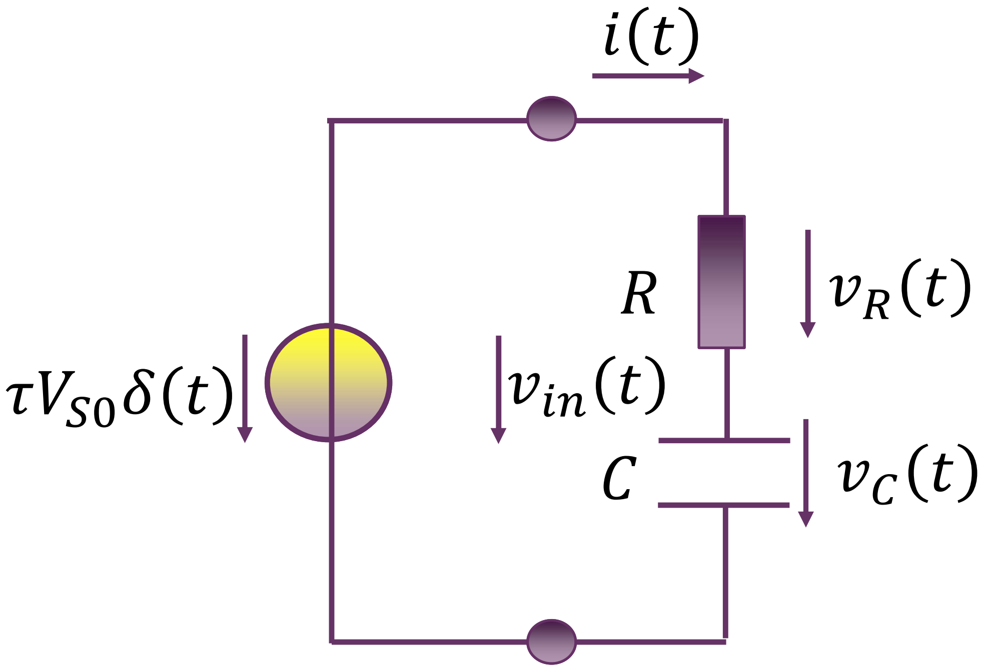
$\longrightarrow \quad \dot{R}=H(j\omega)\dot{E}$

$R(j\omega)=\mathcal{F}_r(j\omega)$

$=\int_{-\infty}^{+\infty}h(t)\,e^{-j\omega t}dt$

$=H(j\omega)\cdot 1=H(j\omega)=\mathcal{F}_h(j\omega)$

RC分压---加载冲激激励



冲激电压$\tau V_{S0}\delta(t)$在$t=0$瞬间的突变属高频分量，电容高频短路（电容电压不能突变，保持0电压），因此激励电压在$t=0$瞬间全部加载到电阻上，电阻上产生电流

$$i(t)=\frac{\tau V_{S0}\delta(t)}{R}=CV_{S0}\delta(t)$$

该冲激电流流过电容，瞬间为电容充电，电容电压发生跳变

$$v_C(0^+)=v_C(0^-)+\frac{1}{C}\int_{0^-}^{0^+}i(t)dt$$

$$=\frac{1}{C}\int_{0^-}^{0^+}CV_{S0}\delta(t)dt=V_{S0}$$

$t>0$后，冲激电压源短路，整个电路呈现为具有初始电压V_{S0}的电容**C**通过电阻**R**放电

$$v_C(t)=V_{S0}e^{-\frac{t}{\tau}} \qquad v_R(t)=-v_C(t)=-V_{S0}e^{-\frac{t}{\tau}}$$

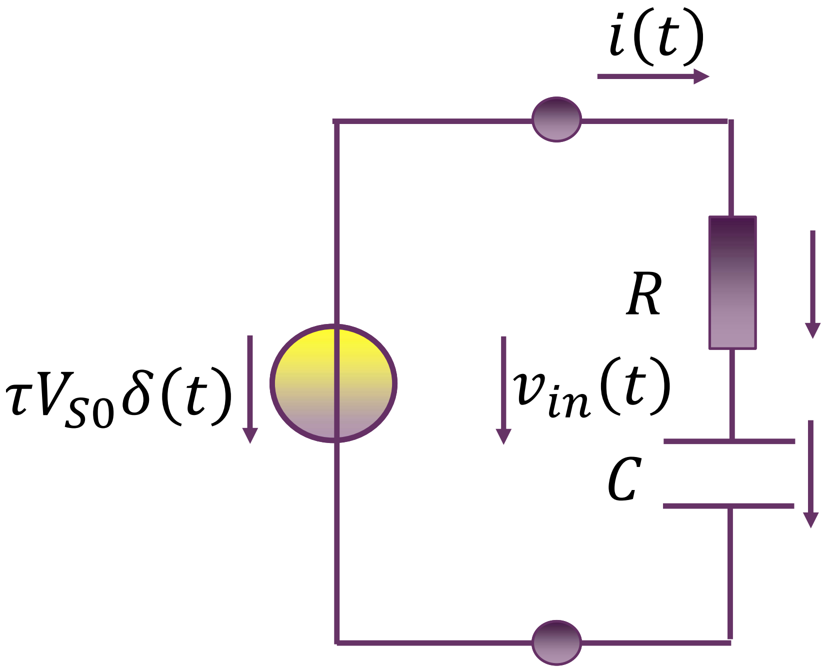
最后获得两个元件上的分压冲激响应为

$$v_C(t)=V_{S0}e^{-\frac{t}{\tau}}U(t) \qquad v_R(t)=\tau V_{S0}\delta(t)-V_{S0}e^{-\frac{t}{\tau}}U(t)$$

单位冲激响应传递函数

$$\mathcal{F}\left(h_{v_R}(t)\right)=\mathcal{F}\left(\delta(t)-h_{v_C}(t)\right)=\mathcal{F}(\delta(t))-\mathcal{F}\left(h_{v_C}(t)\right)$$

$$=1-\frac{1}{1+j\omega\tau}=\frac{j\omega\tau}{1+j\omega\tau}=H_{v_R}(j\omega)$$



$$h_{v_R}(t)=\delta(t)-\frac{1}{\tau}e^{-\frac{t}{\tau}}U(t)$$

$$v_R(t)=\tau V_{S0}\delta(t)-V_{S0}e^{-\frac{t}{\tau}}U(t)$$
$$=\tau V_{S0}h_{v_R}(t)$$

$$v_C(t)=V_{S0}e^{-\frac{t}{\tau}}U(t)=\tau V_{S0}h_{v_C}(t)$$

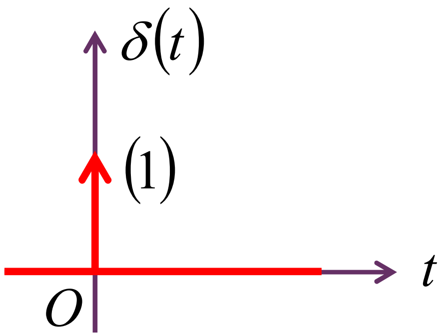
$$h_{v_C}(t)=\frac{1}{\tau}e^{-\frac{t}{\tau}}U(t)$$

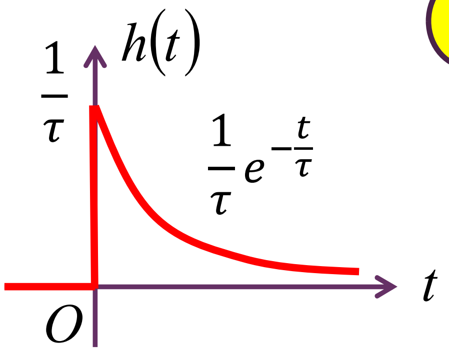
$$\mathcal{F}\left(h_{v_C}(t)\right)=\int_{-\infty}^{+\infty}h_{v_C}(t)\,e^{-j\omega t}dt=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\tau}e^{-\frac{t}{\tau}}U(t)\,e^{-j\omega t}dt$$

$$=\frac{1}{\tau}\int_{0}^{+\infty}e^{-\left(\frac{1}{\tau}+j\omega\right)t}dt=\frac{1}{\tau}\frac{-1}{\frac{1}{\tau}+j\omega}e^{-\left(\frac{1}{\tau}+j\omega\right)t}\Big|_{0}^{\infty}=\frac{1}{1+j\omega\tau}=H_{v_C}(j\omega)$$

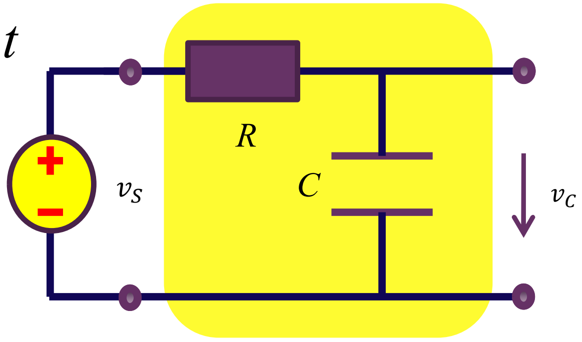
可以验证单位冲激响应的傅里叶变换为传递函数

一阶低通时域特性与频域特性





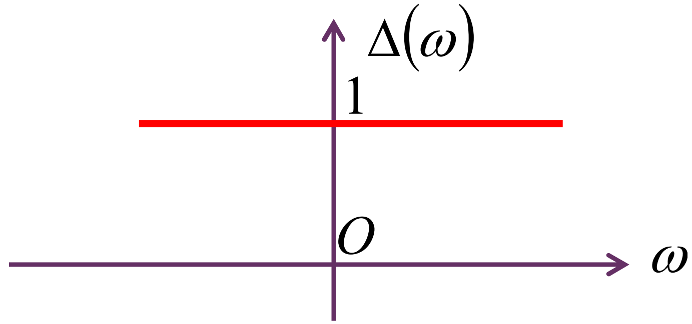
$\tau = RC, GL$

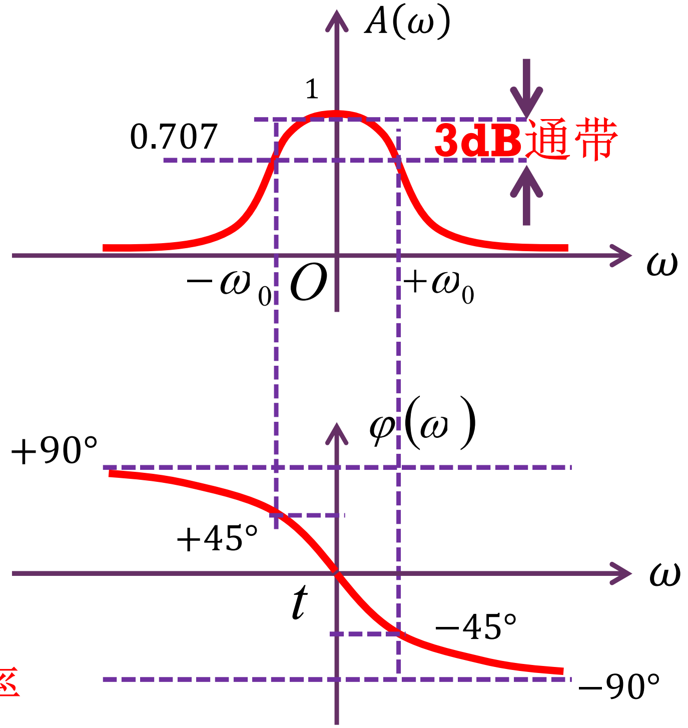


$$\omega_0 = \frac{1}{\tau}$$

$\omega < \omega_0$： 通带

低通系统的通频带



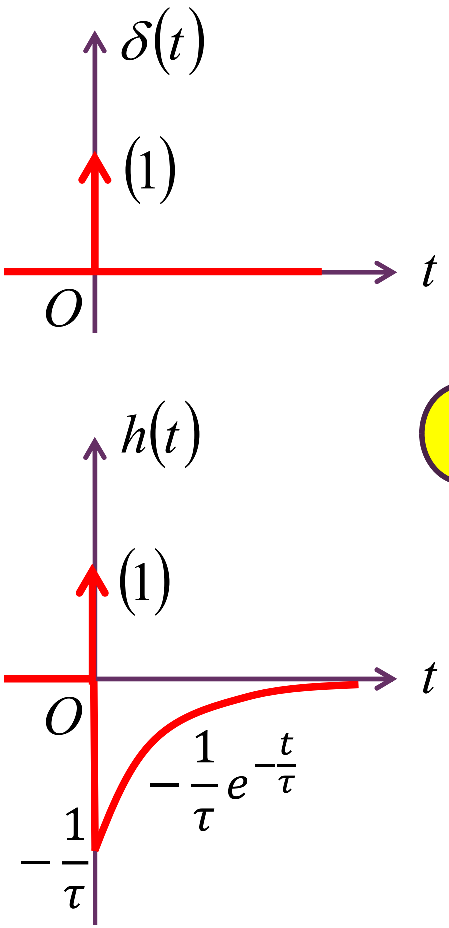


通带内，幅频特性近似平坦，相频特性近似直线

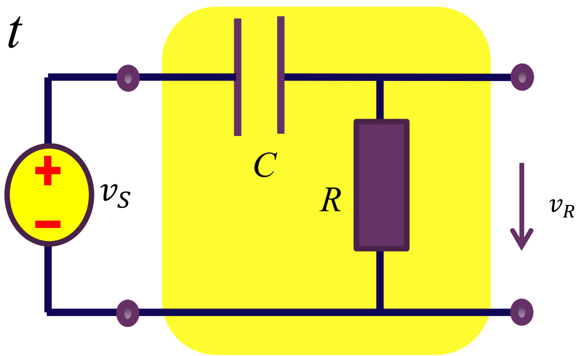
低通通带中心频点为**0**频点

幅频特性偶对称，相频特性奇对称，可以只考察正频率

一阶高通时域特性与频域特性



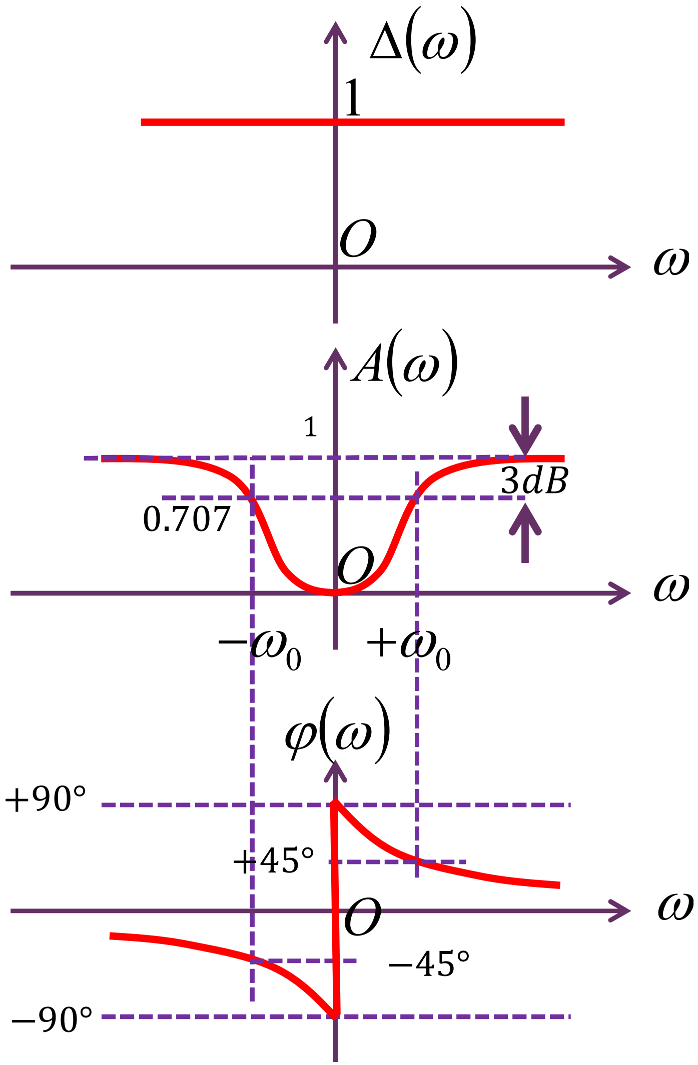
$\tau = RC, GL$



$$\omega_0 = \frac{1}{\tau}$$

$\omega > \omega_0$：通带

高通系统的通频带



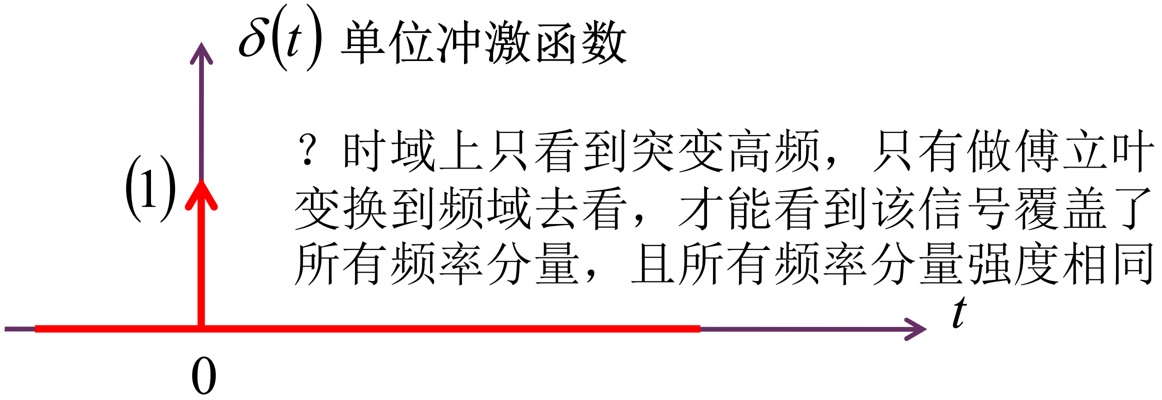
高通通带中心频点为无穷频点

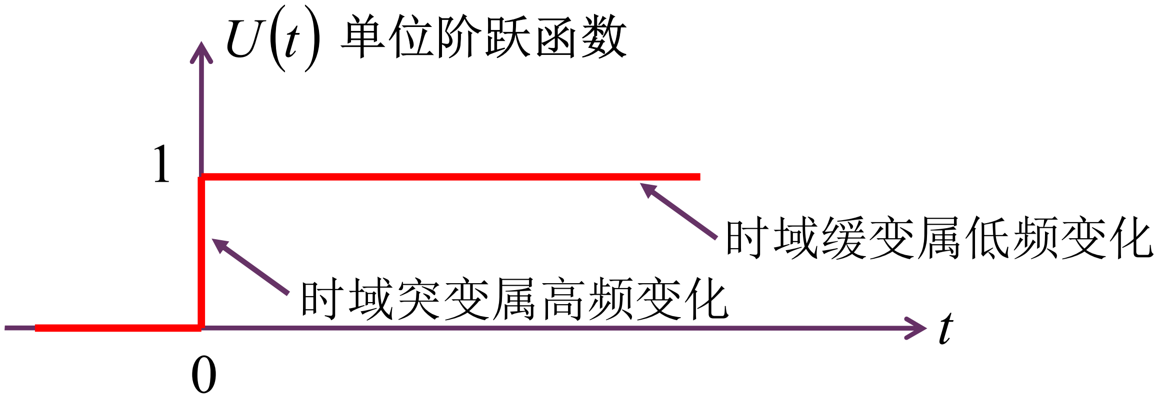
零频点相位有**180°**跳变

180°相位跳变仅出现在幅度为**0**的频点

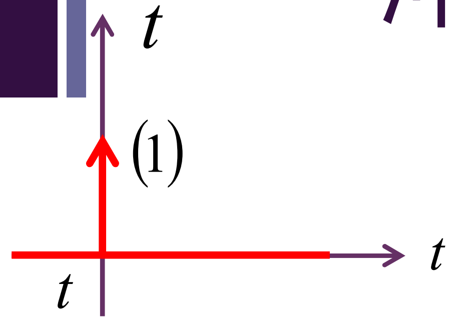
冲激和阶跃

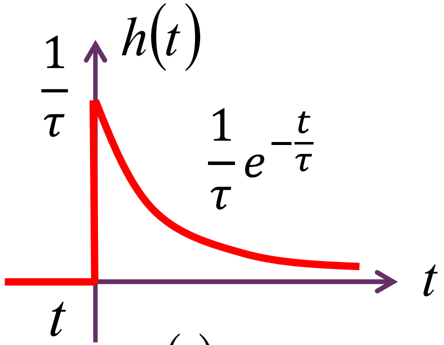
- 冲激信号及冲激响应的时域波形中，不容易看清楚哪些是低频变化哪些是高频变化，而阶跃信号及阶跃响应的时域波形中，却可以很清晰地看出哪里是高频变化哪里是低频变化

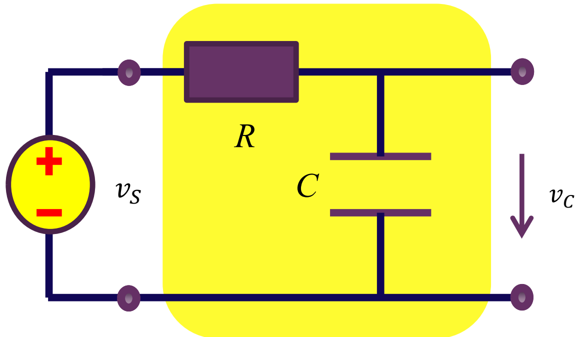


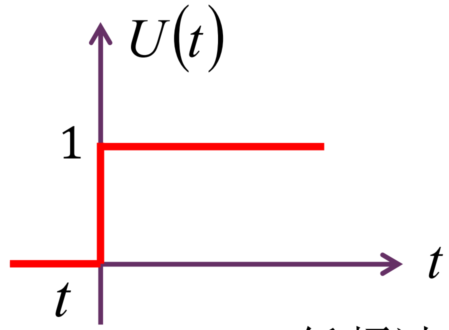


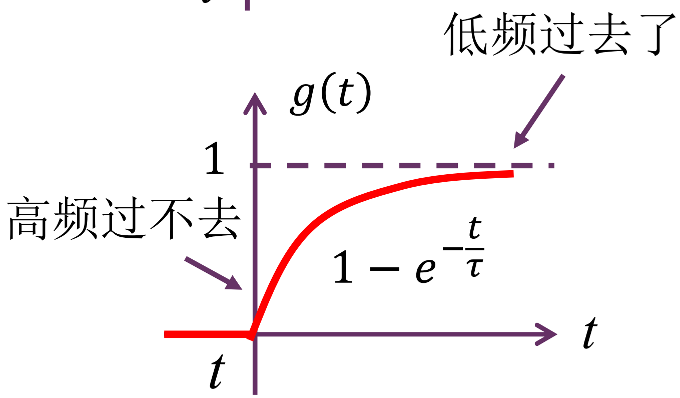
冲激响应和阶跃响应

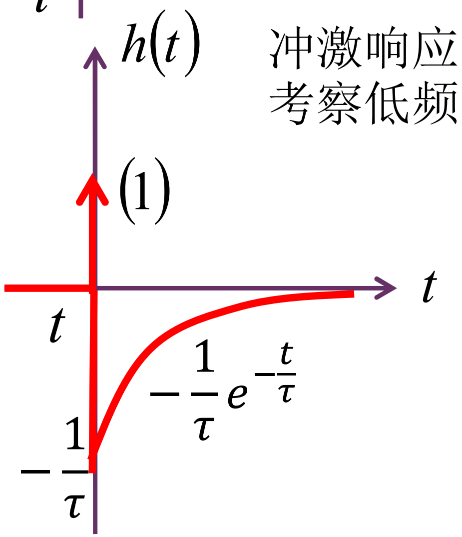




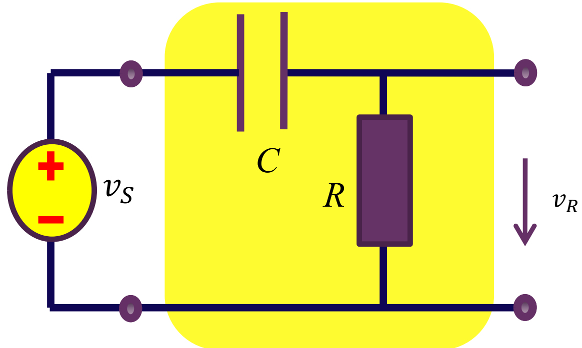




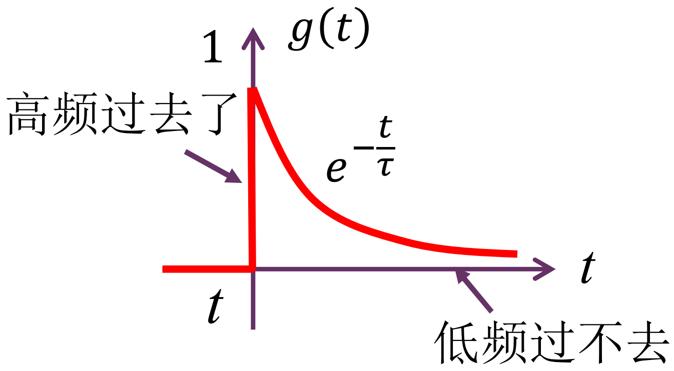




冲激响应需要在频域
考察低频高频谁通过



阶跃响应在时域即可
确认低频高频谁通过



LTI系统的时域分析和频域分析

- 频域分析：用相量法求传递函数很简单
  - 频域测量：一个频点一个频点地测量稳态，麻烦耗时；但是测量精度高，因而是当前系统测量的主要方式，如网络分析仪测量的输入阻抗、传递函数等

- 时域分析：用时域积分法求解运算过程相对复杂
  - 时域测量：理论上，一个冲激激励，即可获得所有频点的频率响应，因而是相对简单的测量方法

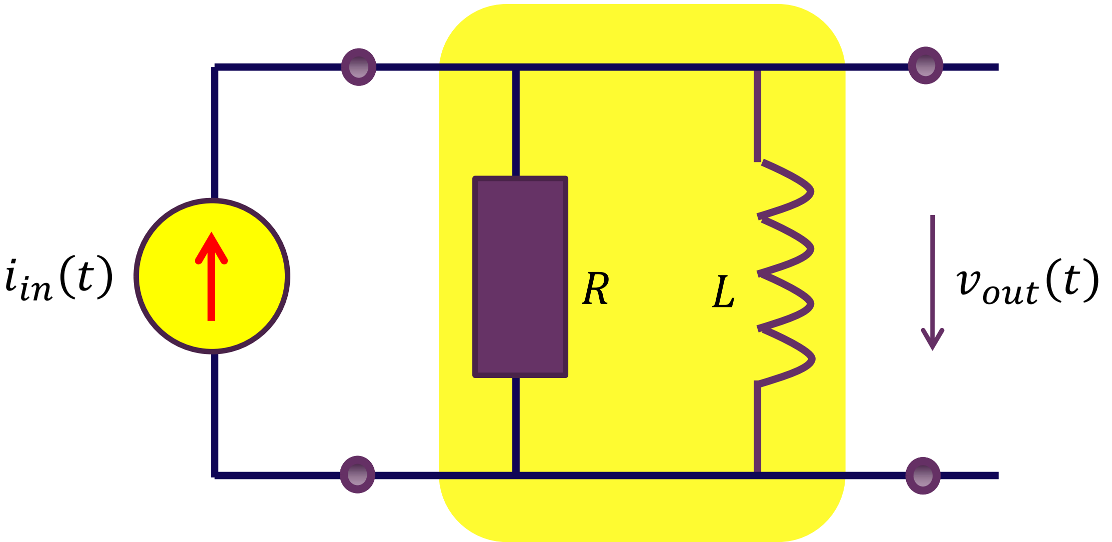
$$H(j\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}h(t)e^{-j\omega t}dt$$

    - 但电路中并不存在冲激信号，电路中的冲激事实上是一种电磁辐射
    - 在实际时域测量操作时，一般用阶跃激励获得阶跃响应的方式进行测量和分析，原因是阶跃信号容易获得，同时在分析时，通过阶跃响应的时域波形易于理解系统的通带特性
      - 理论分析时，冲激响应和阶跃响应往往一并考察

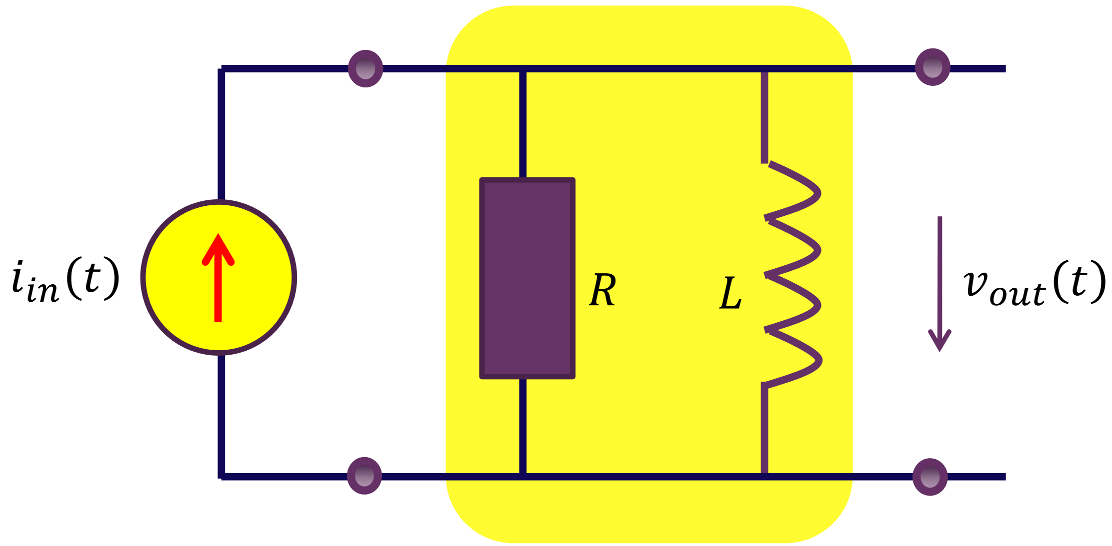
$$\frac{d}{dt}g(t)=h(t) \qquad \int_{-\infty}^{t}h(\tau)d\tau=g(t)$$

例2 跨阻传递关系分析例

- 请对如图所示二端口网络进行跨阻传递关系的时频分析



跨阻传递函数：频域分析



$$H(j\omega)=\frac{\dot{V}_{out}(j\omega)}{\dot{I}_{in}(j\omega)}=R_{m0}(j\omega)=\frac{R\times j\omega L}{R+j\omega L}=R\frac{j\omega GL}{1+j\omega GL}=R\frac{j\omega\tau}{1+j\omega\tau}=H_0\frac{j\omega\tau}{1+j\omega\tau}$$

典型的一阶高通传递函数

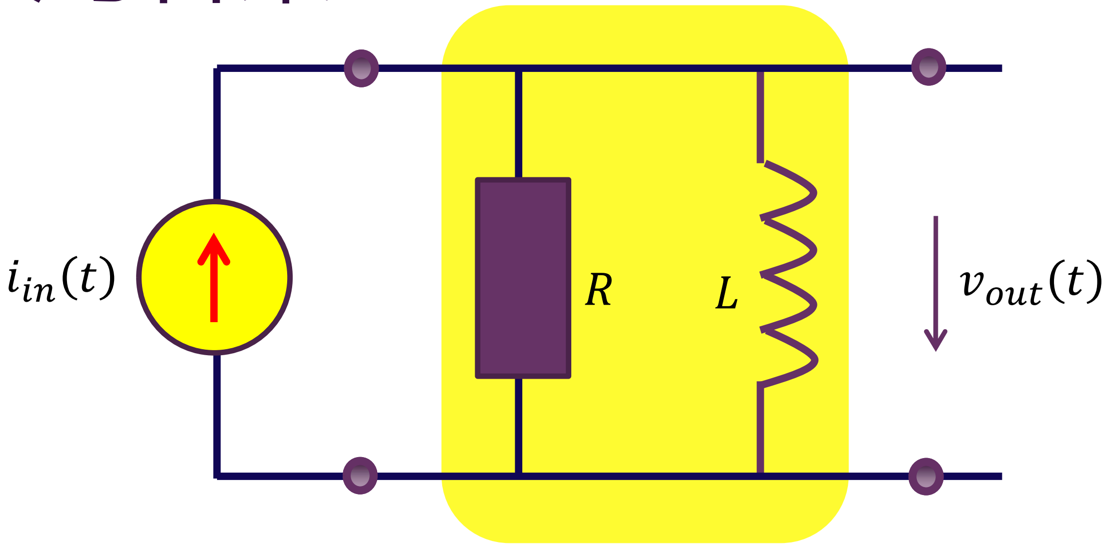
$$H_0=R$$

中心频点的传递系数

$$\tau=GL=\frac{L}{R}$$

$$f_{3dB}=\frac{1}{2\pi\tau}$$

频域分析：直接写答案



分析：

电感直流短路，输出电压为0，直流信号无法通过

电感高频开路，输出电压为输入电流乘以电阻**R**，高频信号可以通过

因而这是一个一阶高通滤波器，其传函典型形式为

$$H(j\omega)=\frac{\dot{V}_{out}(j\omega)}{\dot{I}_{in}(j\omega)}=H_0\frac{j\omega\tau}{1+j\omega\tau}$$

其中，H_0为高通滤波器中心频点无穷频点的传递系数

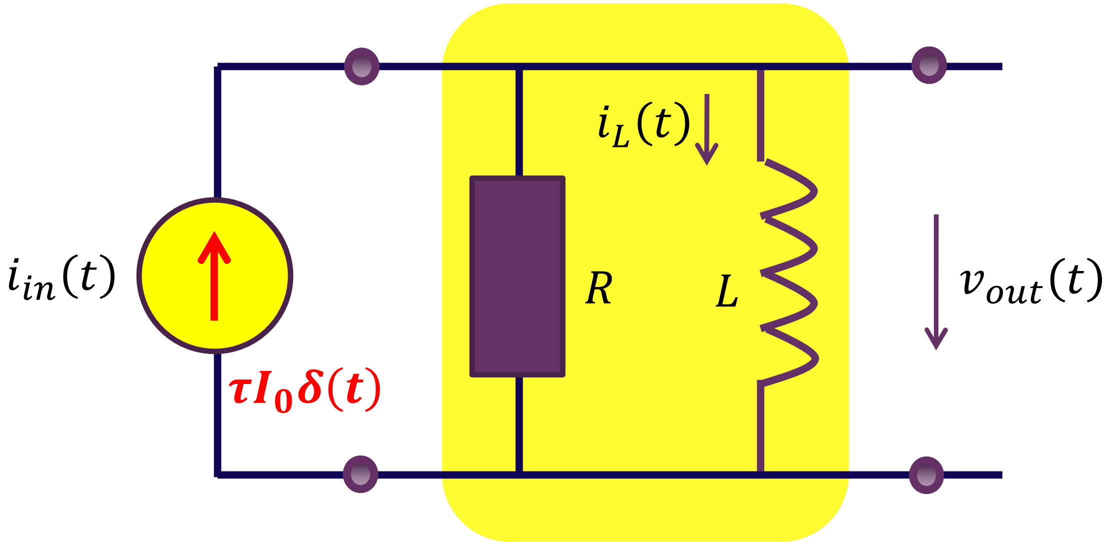
$$H_0=H(j\infty)=\frac{\dot{V}_{out}(j\infty)}{\dot{I}_{in}(j\infty)}=R$$

$\tau=GL$为一阶**RL**电路的时间常数，显然该高通滤波器的**3dB**频点为

$$f_{3dB}=\frac{1}{2\pi\tau}$$

时域分析：冲激响应：三要素法

零状态响应分析



要素1：时间常数

$\tau = GL$

要素2：初值

$t = 0^-, v_{out}(0^-) = -i_L(0^-)R = 0$

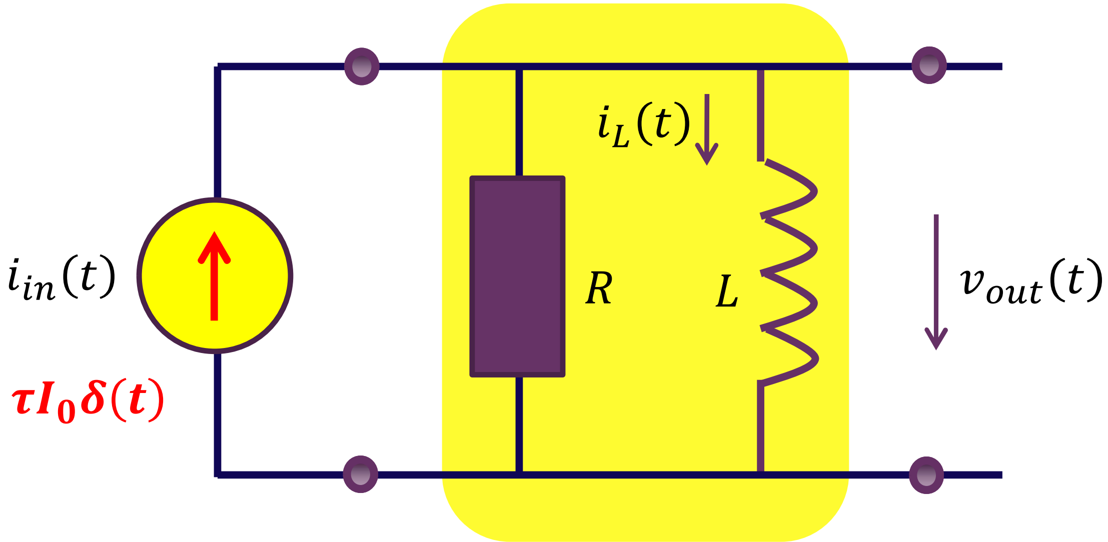
$i_{in}(t) = \tau I_0\delta(t)$冲激电流t=0加载瞬间，电感电流不能突变（电感高频开路），$i_L(0) = i_L(0^-) = 0$ ，故而所有激励电流全部流过电阻R，在电阻两端产生冲激电压，$v_{out}(0) = \tau I_0 R\delta(t)$,该冲激电压加载电感两端，电感电流突变，

$$i_L(0^+) = i_L(0^-) + \frac{1}{L}\int_{0^-}^{0^+} v_L(t)\,dt = \frac{1}{L}\int_{0^-}^{0^+} \tau I_0 R\delta(t)\,dt = \frac{\tau I_0 R}{L}\int_{0^-}^{0^+} \delta(t)\,dt = I_0$$

t=0⁺时刻，冲激电流支路电流为0（开路），于是$i_L(0^+)$电流全部流过电阻，

$t = 0^+, v_{out}(0^+) = -i_L(0^+)R = -I_0 R$

冲激响应：三要素法



要素1：时间常数

$\tau = GL$

要素2：初值

$t = 0^-, v_{out}(0^-) = -i_L(0^-)R = 0$

$v_{out}(0) = \tau I_0 R\delta(t)$

$t = 0^+, v_{out}(0^+) = -i_L(0^+)R = -I_0 R$

要素3：稳态响应：电感以初始电流I_0通过电阻R放磁，等待足够长时间，电感储存的磁通（磁能）全部被电阻消耗，故而

$$i_L(t\to\infty) = 0 \qquad v_{out}(t\to\infty) = -Ri_L(t\to\infty) = 0$$

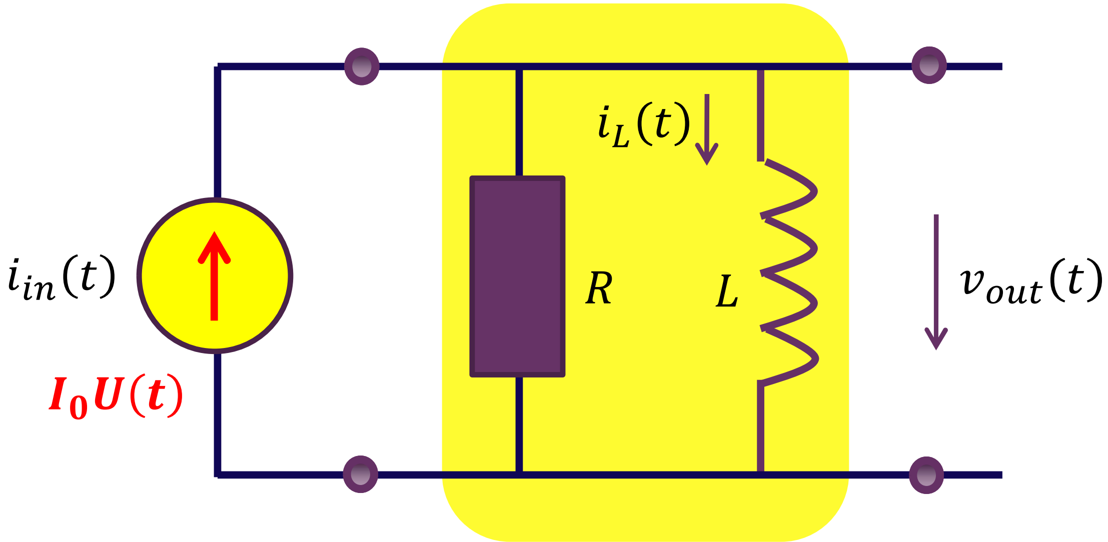
考虑到t=0时刻的冲激电压$v_{out}(0) = \tau I_0 R\delta(t)$,取$v_{out\infty}(t) = \tau I_0 R\delta(t)$

$$v_{out}(t) = v_{out\infty}(t) + \left(v_{out}(0^+) - v_{out\infty}(0^+)\right)e^{-\frac{t}{\tau}}U(t) = \tau I_0 R\delta(t) - I_0 R e^{-\frac{t}{\tau}}U(t)$$

$$\boldsymbol{h(t) = \frac{1}{\tau I_0}v_{out}(t) = R\delta(t) - R\frac{1}{\tau}e^{-\frac{t}{\tau}}U(t) = R\left(\delta(t) - \frac{1}{\tau}e^{-\frac{t}{\tau}}U(t)\right)}$$

时域分析：阶跃响应：三要素法

零状态响应分析



要素1：时间常数

$\tau = GL$

要素2：初值

$t = 0^-, v_{out}(0^-) = -i_L(0^-)R = 0$

$i_{in}(t) = I_0U(t)$阶跃电流t=0加载瞬间，电感电流不能突变，$i_L(0^+) = i_L(0^-) = 0$，故而所有激励电流全部流过电阻**R**，在电阻两端产生阶跃电压，$v_{out}(0^+) = I_0R$，

要素3：稳态响应：等待足够长时间，电路为直流电路，电感直流短路，故而

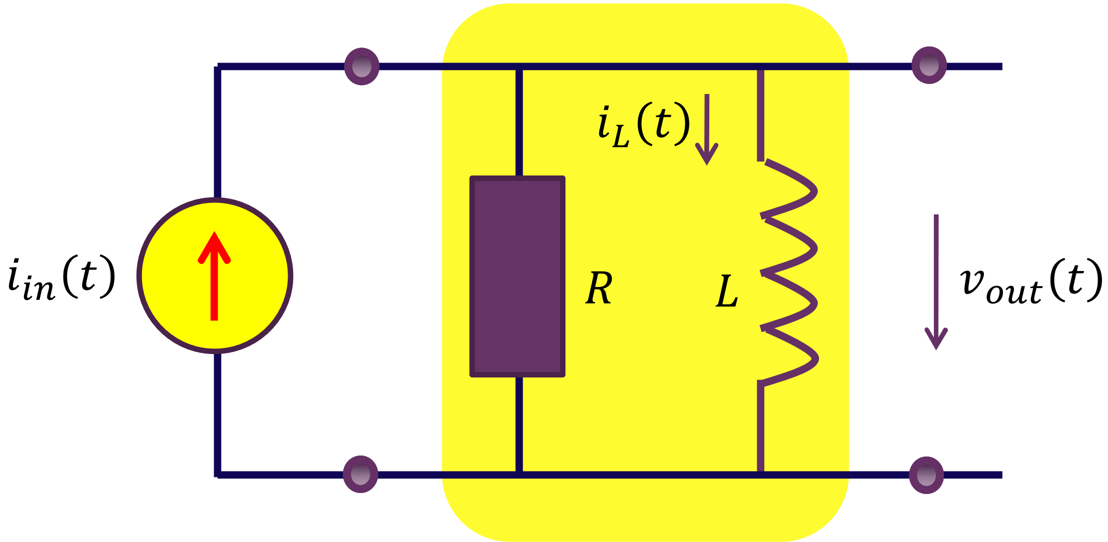
$$v_{out\infty}(t) = 0$$

$$v_{out}(t) = v_{out\infty}(t) + \left(v_{out}(0^+) - v_{out\infty}(0^+)\right)e^{-\frac{t}{\tau}}U(t) = I_0Re^{-\frac{t}{\tau}}U(t)$$

$$\boldsymbol{g(t) = \frac{1}{I_0}v_{out}(t) = Re^{-\frac{t}{\tau}}U(t)}$$

验算

$$H(j\omega)=\frac{\dot{V}_{out}(j\omega)}{\dot{I}_{in}(j\omega)}=R\frac{j\omega\tau}{1+j\omega\tau}$$



$$h(t)=R\left(\delta(t)-\frac{1}{\tau}e^{-\frac{t}{\tau}}U(t)\right)$$

$$g(t)=Re^{-\frac{t}{\tau}}U(t)$$

$$\frac{d}{dt}g(t)=\frac{d}{dt}\left(Re^{-\frac{t}{\tau}}U(t)\right)=Re^{-\frac{t}{\tau}}\frac{d}{dt}U(t)+RU(t)\frac{d}{dt}e^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$=Re^{-\frac{t}{\tau}}\delta(t)-\frac{1}{\tau}RU(t)e^{-\frac{t}{\tau}}=R\delta(t)-R\frac{1}{\tau}e^{-\frac{t}{\tau}}U(t)$$

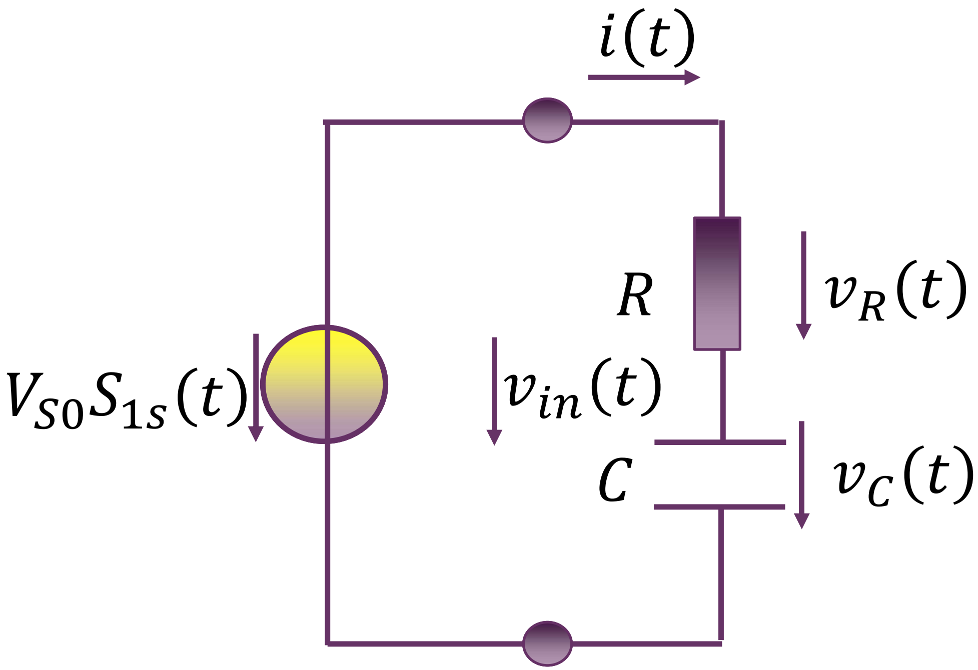
$$=R\left(\delta(t)-\frac{1}{\tau}e^{-\frac{t}{\tau}}U(t)\right)=h(t)$$

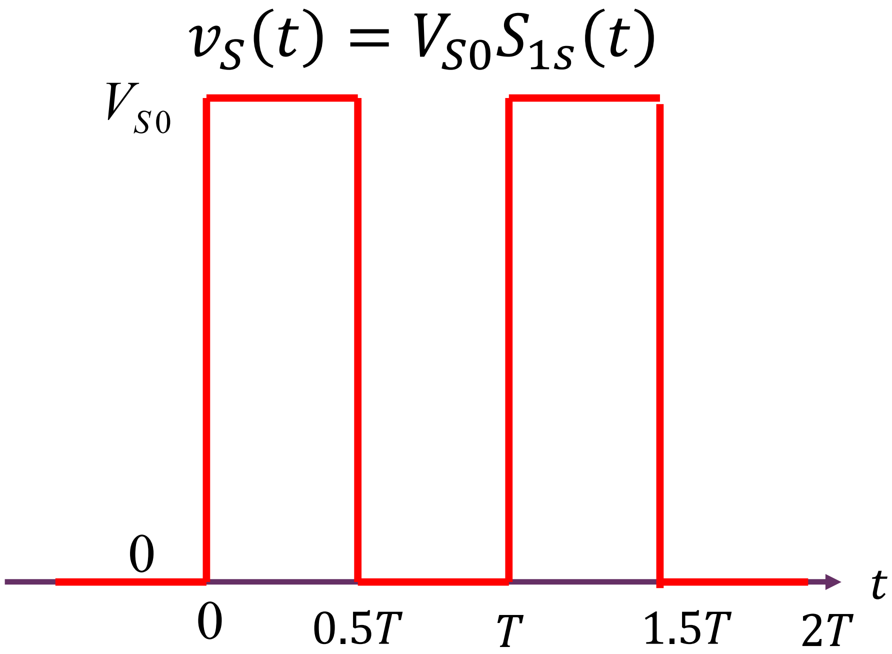
可进一步验证

$$\mathcal{F}\big(h(t)\big)=\int_{-\infty}^{+\infty}h(t)\,e^{-j\omega t}dt$$

$$=H(j\omega)=R\frac{j\omega\tau}{1+j\omega\tau}$$

三、RC分压---方波信号激励

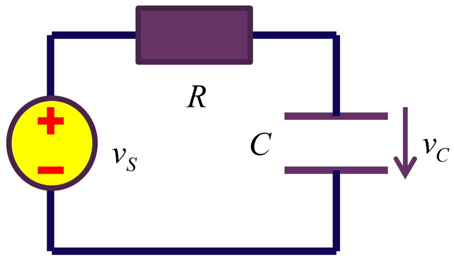




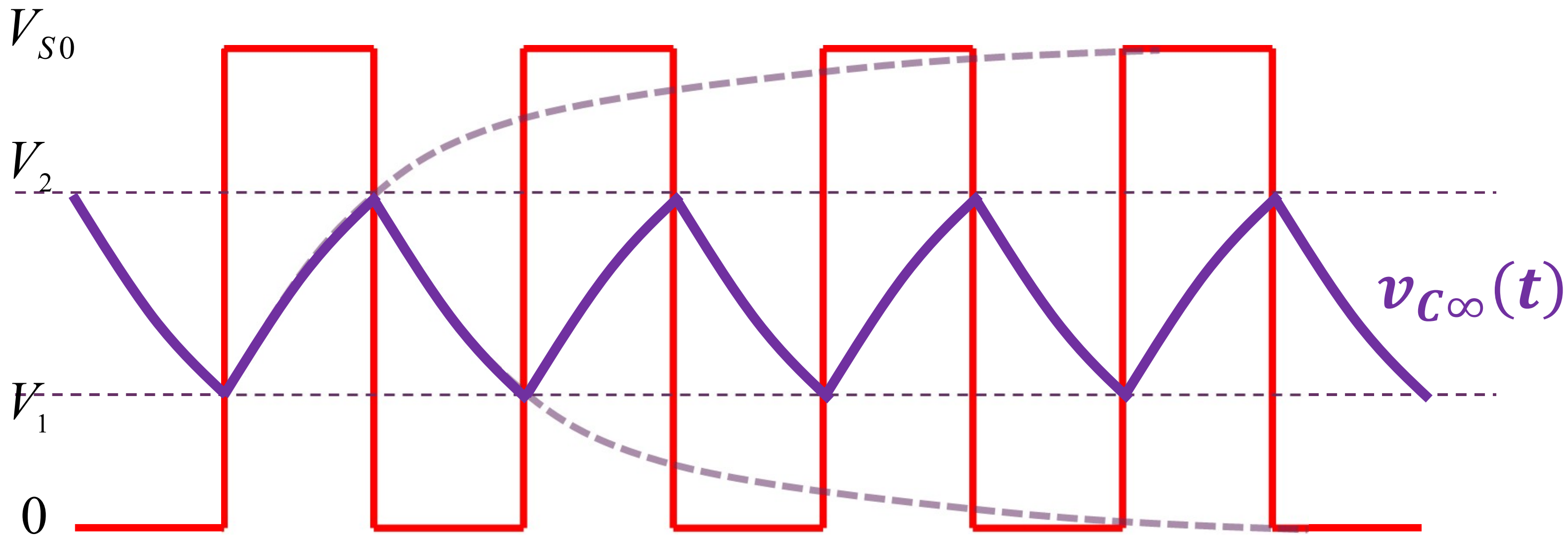
可以采用三要素法求解，显然此电路的时间常数$\tau = RC$，初值$v_C(0) = 0$都是确定无疑的，需要确定的是稳态响应：只需假设方波信号是在$t = -\infty$时加载的，结果就是稳态响应

电容电压稳态响应分析

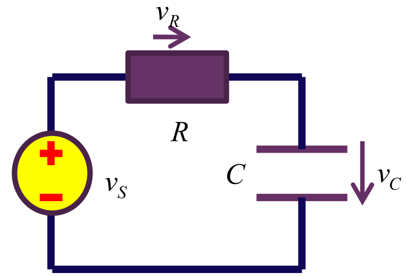
- 直流（冲激、阶跃）激励的稳态响应是直流；正弦激励的稳态响应是正弦波信号；周期信号的稳态响应一定也是同频周期信号

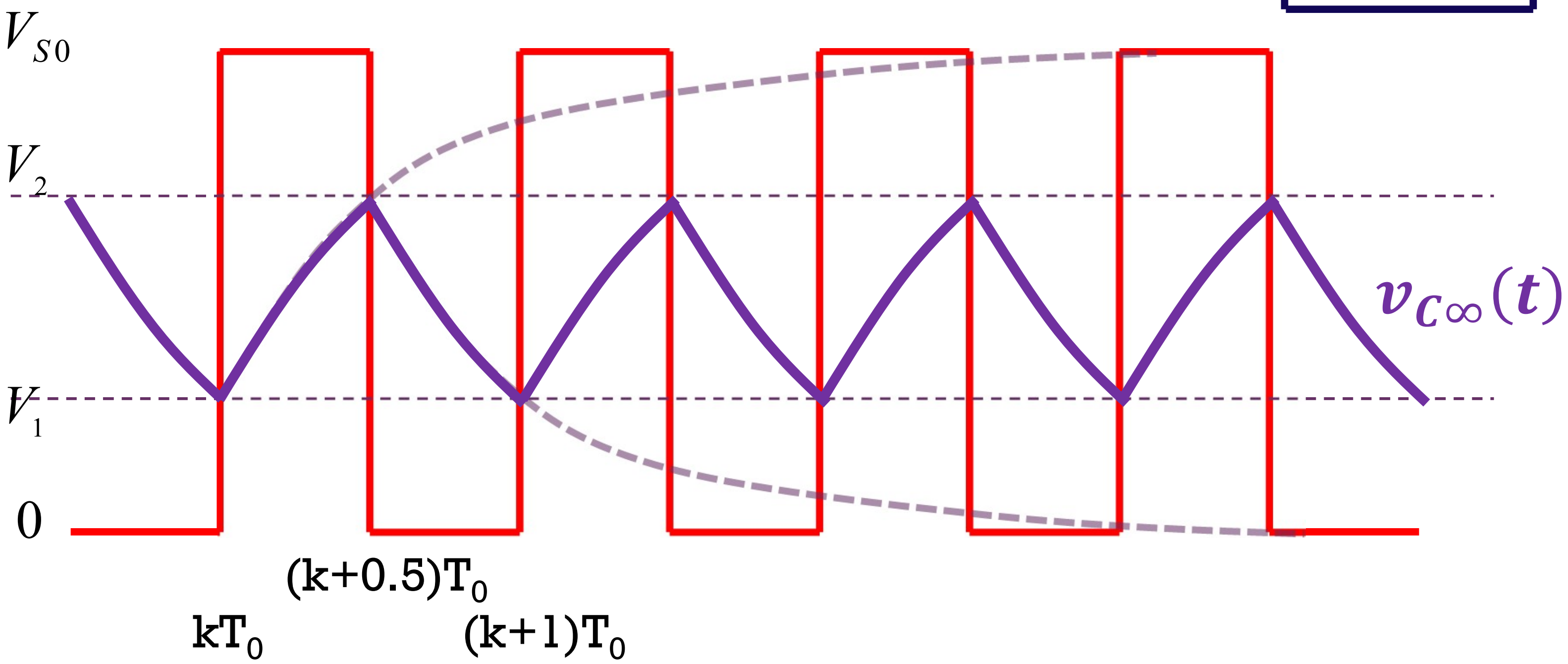


- 方波信号的稳态响应波形如图
  - 它是周期信号
  - 激励在V_{S0}时段时，犹如电容充电，激励在0时段，犹如电容放电



分时段表述

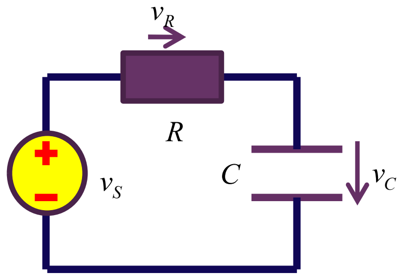


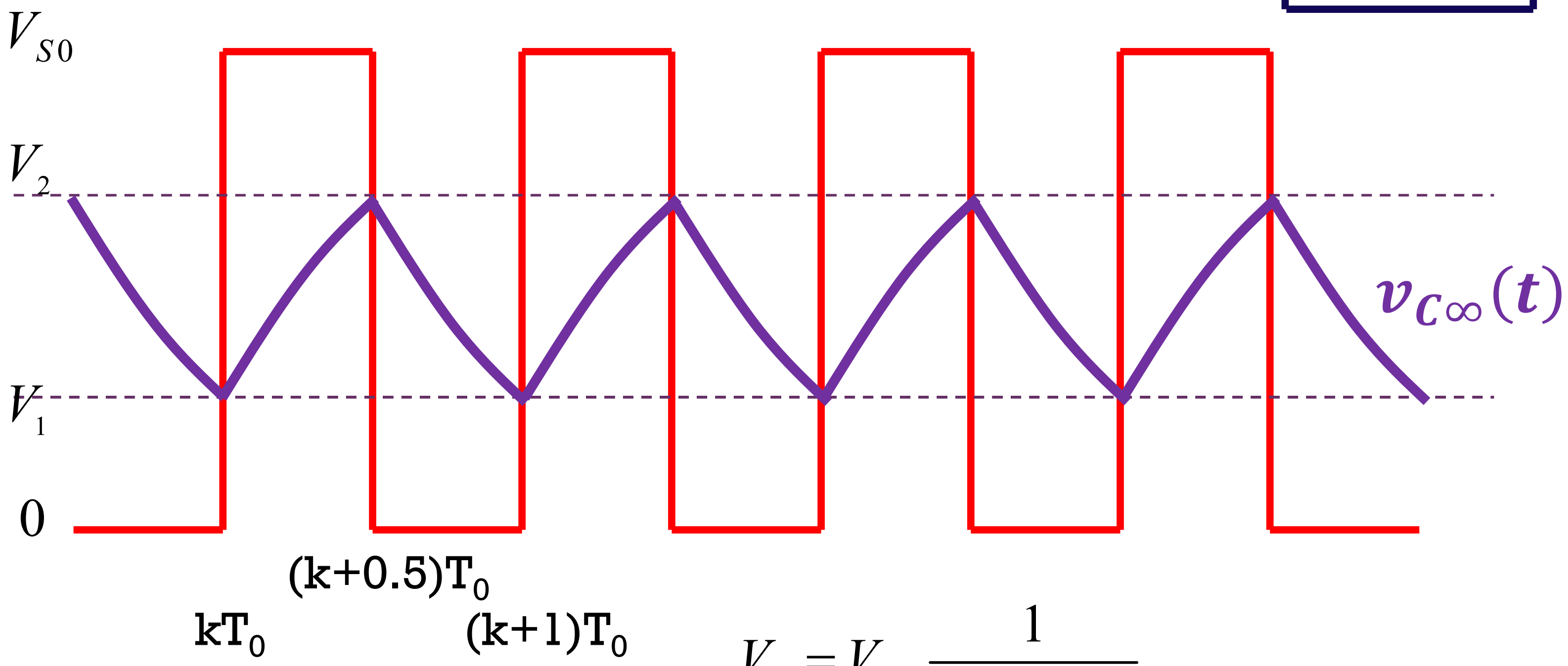


$$kT_0 \sim (k+0.5)T_0: \quad v_{C\infty}(t) = V_{S0} + (V_1 - V_{S0})e^{-\frac{t-kT_0}{\tau}} \qquad V_{S0} + (V_1 - V_{S0})e^{-\frac{0.5T_0}{\tau}} = V_2$$

$$(k+0.5)T_0 \sim (k+1)T_0: \quad v_{C\infty}(t) = 0 + (V_2 - 0)e^{-\frac{t-(k+0.5)T_0}{\tau}} \qquad V_2 e^{-\frac{0.5T_0}{\tau}} = V_1$$

稳态响应的上下界





$$V_{S0}+(V_1-V_{S0})e^{-\frac{0.5T_0}{\tau}}=V_2$$

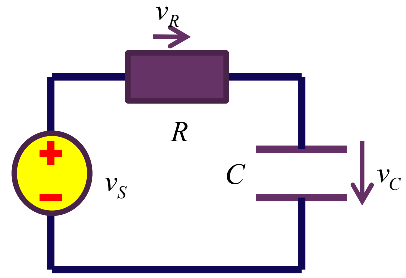
$$V_2 e^{-\frac{0.5T_0}{\tau}}=V_1$$

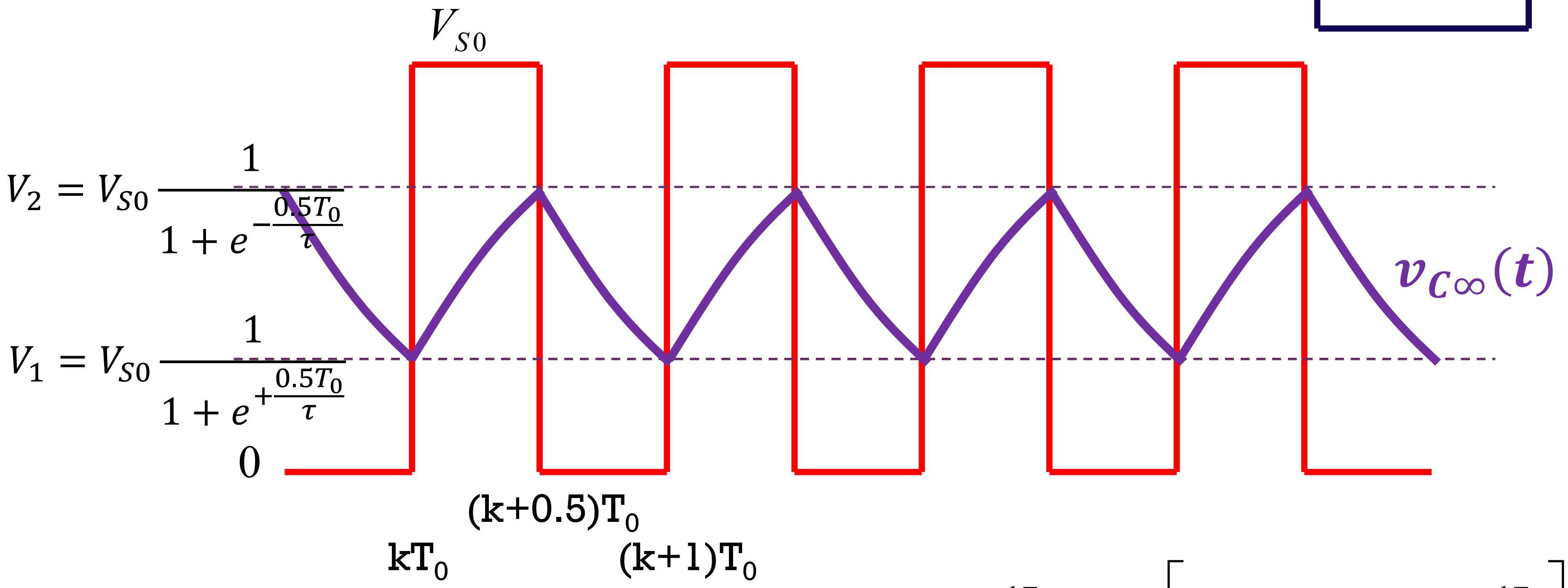
$$V_2=V_{S0}\frac{1}{1+e^{-\frac{0.5T_0}{\tau}}}$$

$$V_1=V_{S0}\frac{e^{-\frac{0.5T_0}{\tau}}}{1+e^{-\frac{0.5T_0}{\tau}}}$$

$$\frac{V_1+V_2}{2}=0.5V_{S0}$$

电容电压稳态响应



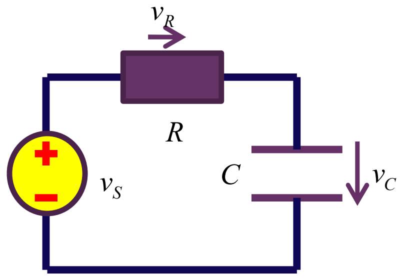


$$kT_0 \sim (k+0.5)T_0: \quad v_{C\infty}(t) = V_{S0} + (V_1 - V_{S0})e^{-\frac{t-kT_0}{\tau}} = V_{S0}\left[1 - \frac{1}{1+e^{-\frac{0.5T_0}{\tau}}}e^{-\frac{t-kT_0}{\tau}}\right]$$

时间分区表述

$$(k+0.5)T_0 \sim (k+1)T_0: \quad v_{C\infty}(t) = 0 + (V_2 - 0)e^{-\frac{t-(k+0.5)T_0}{\tau}} = V_{S0}\frac{1}{1+e^{-\frac{0.5T_0}{\tau}}}e^{-\frac{t-(k+0.5)T_0}{\tau}}$$

电阻电压稳态响应



$$kT_0 \sim (k+0.5)T_0: \qquad v_{C\infty}(t) = V_{S0}\left[1 - \frac{1}{1+e^{-\frac{0.5T_0}{\tau}}} e^{-\frac{t-kT_0}{\tau}}\right]$$

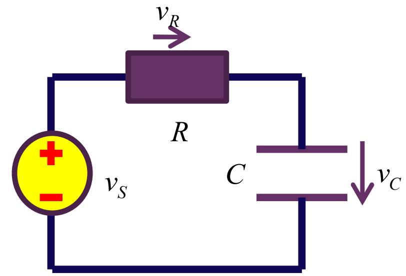
$$(k+0.5)T_0 \sim (k+1)T_0: \qquad v_{C\infty}(t) = V_{S0}\frac{1}{1+e^{-\frac{0.5T_0}{\tau}}} e^{-\frac{t-(k+0.5)T_0}{\tau}}$$

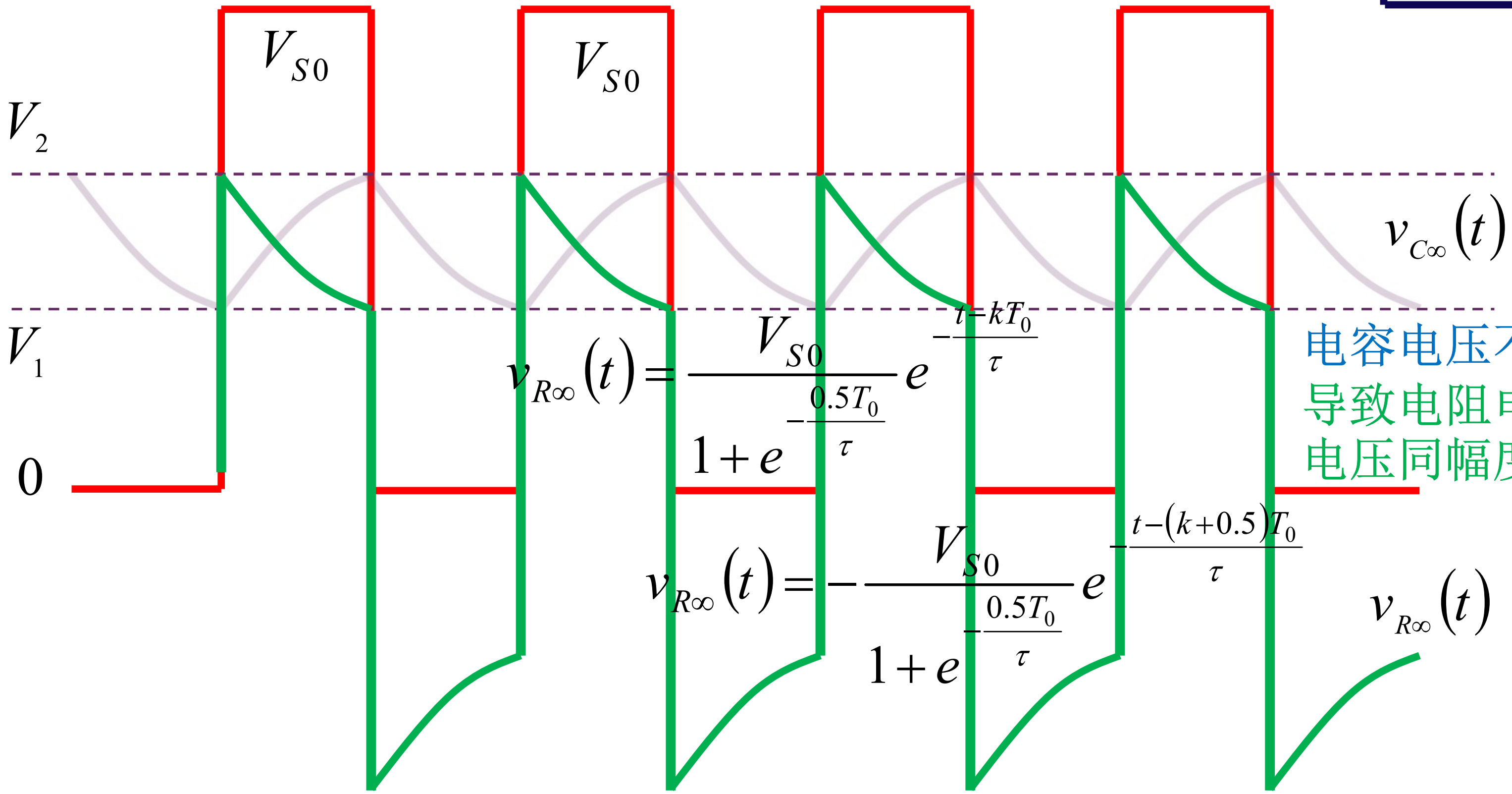
$$v_{R\infty}(t) = v_{S\infty}(t) - v_{C\infty}(t)$$

$$kT_0 \sim (k+0.5)T_0: \qquad v_{R\infty}(t) = \frac{V_{S0}}{1+e^{-\frac{0.5T_0}{\tau}}} e^{-\frac{t-kT_0}{\tau}}$$

$$(k+0.5)T_0 \sim (k+1)T_0: \qquad v_{R\infty}(t) = -\frac{V_{S0}}{1+e^{-\frac{0.5T_0}{\tau}}} e^{-\frac{t-(k+0.5)T_0}{\tau}}$$

电阻电压稳态响应波形





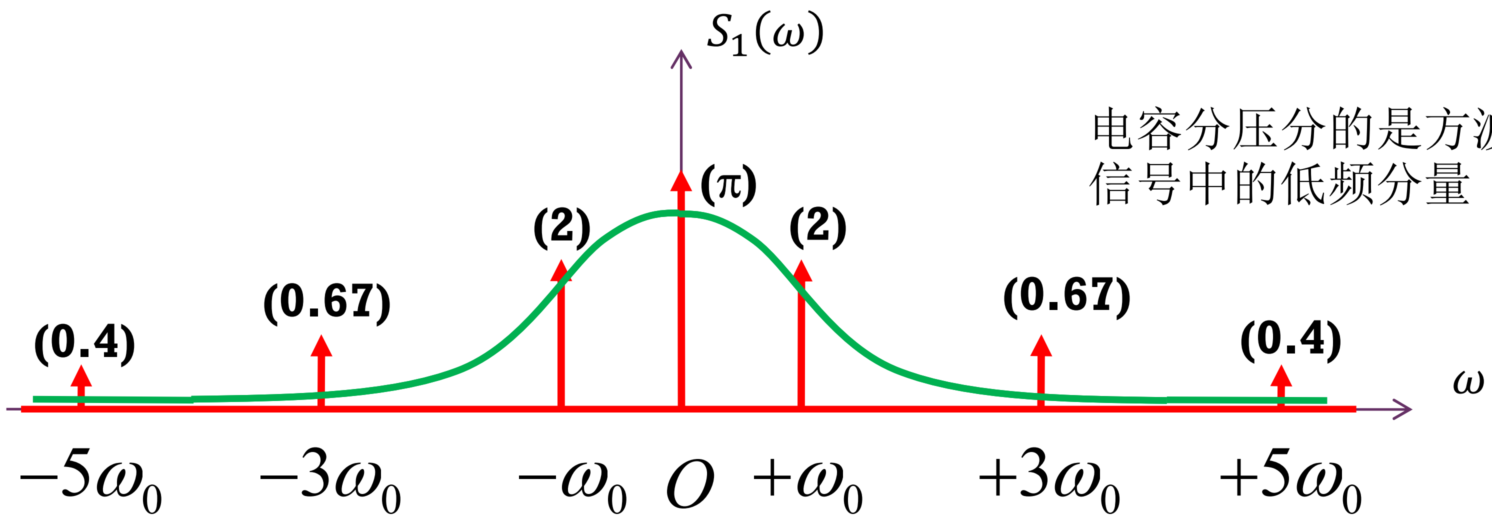
电容电压不能跳变：
导致电阻电压随输入电压同幅度跳变

电容电压是输入电压中的低频分量，电容电压平均值为**0.5V$_{S0}$**，取的是直流附近的分量

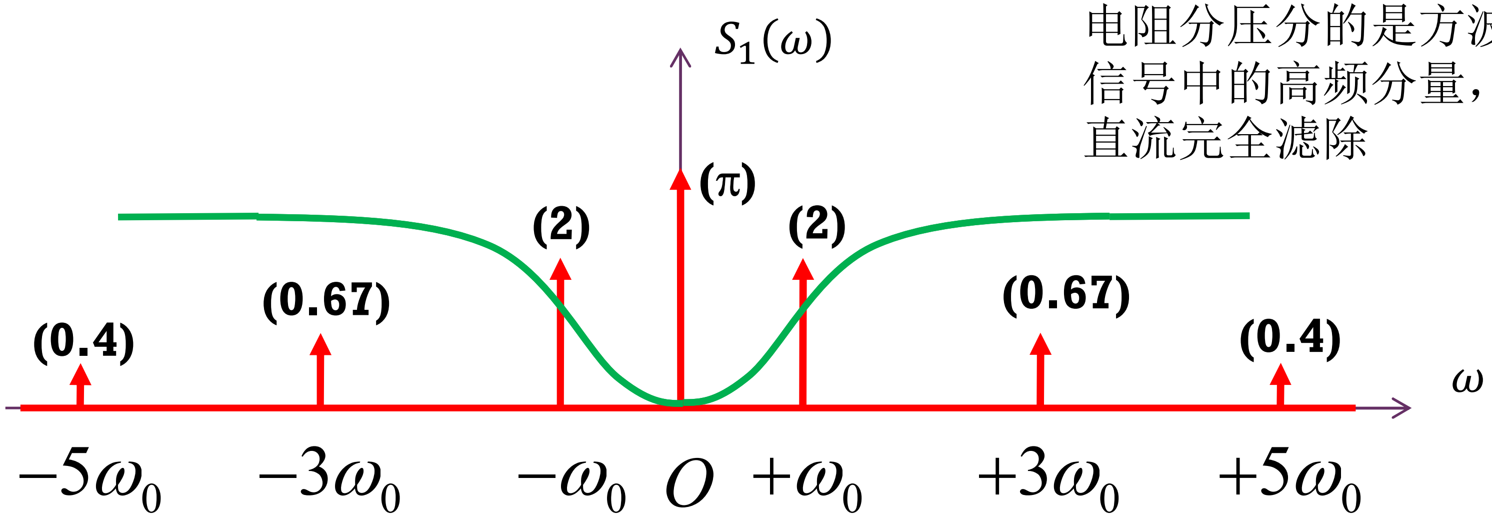
电阻电压是输入电压中的高频分量，电容隔断直流，电阻上没有直流电压，平均值为**0**

频域看

$$\omega_{dB} = \frac{1}{\tau} = \omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$

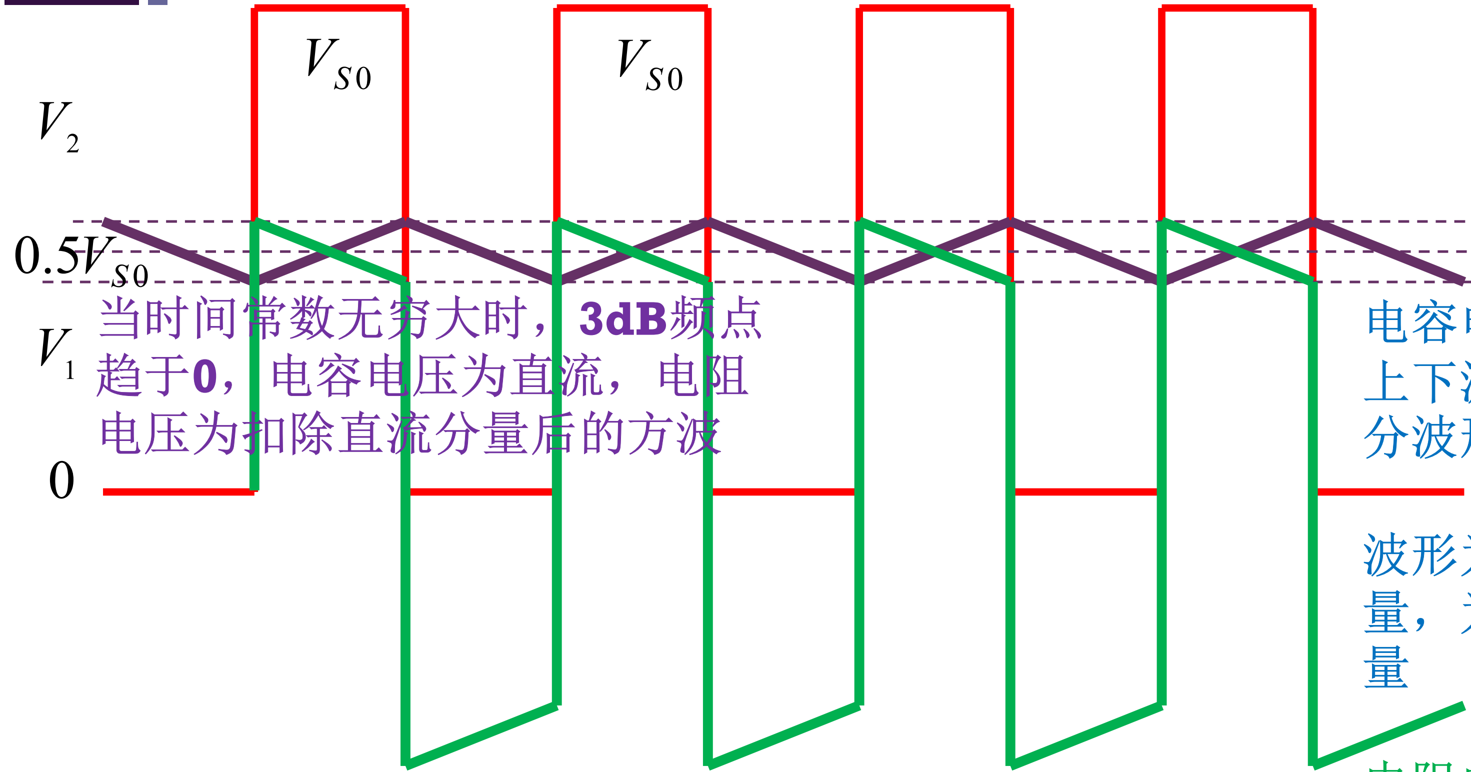


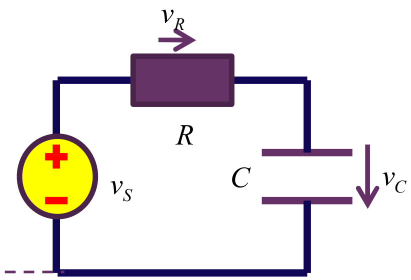
电容分压分的是方波信号中的低频分量



电阻分压分的是方波信号中的高频分量，直流完全滤除

极致1：时间常数很大，3dB频点很小





当时间常数无穷大时，**3dB**频点趋于**0**，电容电压为直流，电阻电压为扣除直流分量后的方波

电容电压在**0.5V**

电容电压在$\mathbf{0.5V_{S0}}$平均值上下波动，波形为方波积分波形：三角波

波形为输入信号的平均分量，为输入信号的低频分量

电阻电压在**0V**平均值上下波动，波形为输入信号去除了平均值后的高频分量

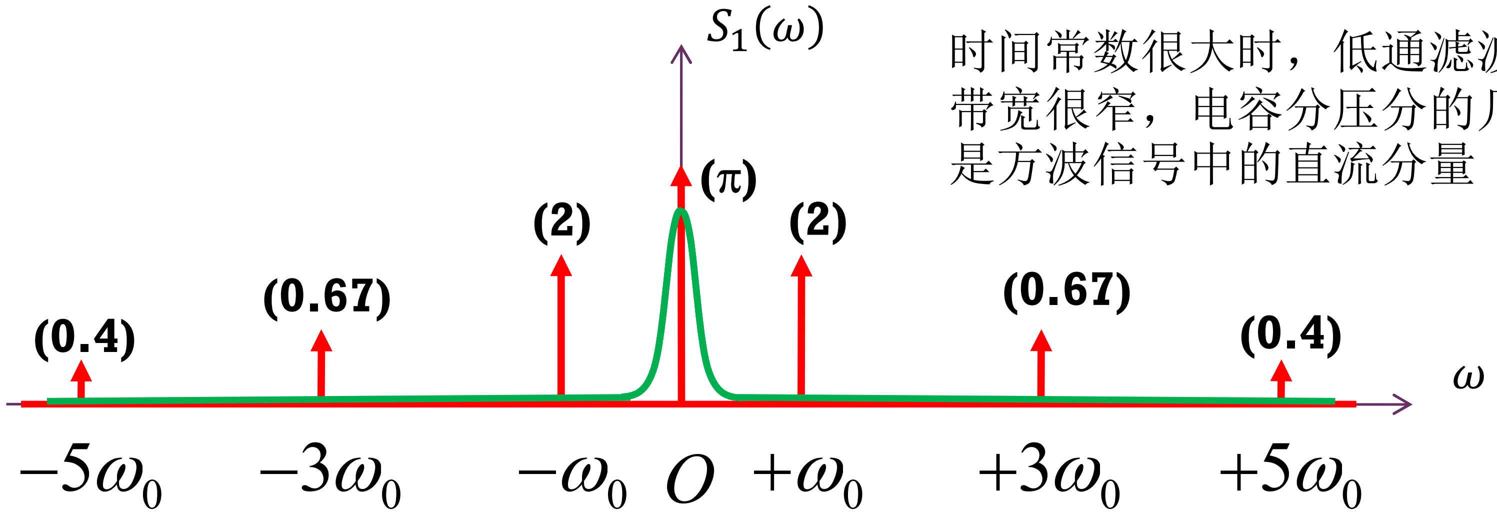
C极大时，**C**为耦合电容，隔直通交

$$V_1=V_{S0}\frac{1}{1+e^{\frac{0.5T_0}{\tau}}}\approx V_{S0}\frac{1}{1+1+\frac{0.5T_0}{\tau}}=\frac{V_{S0}}{2}\frac{1}{1+\frac{0.5T_0}{2\tau}}\approx\frac{V_{S0}}{2}\left(1-\frac{0.5T_0}{2\tau}\right)$$

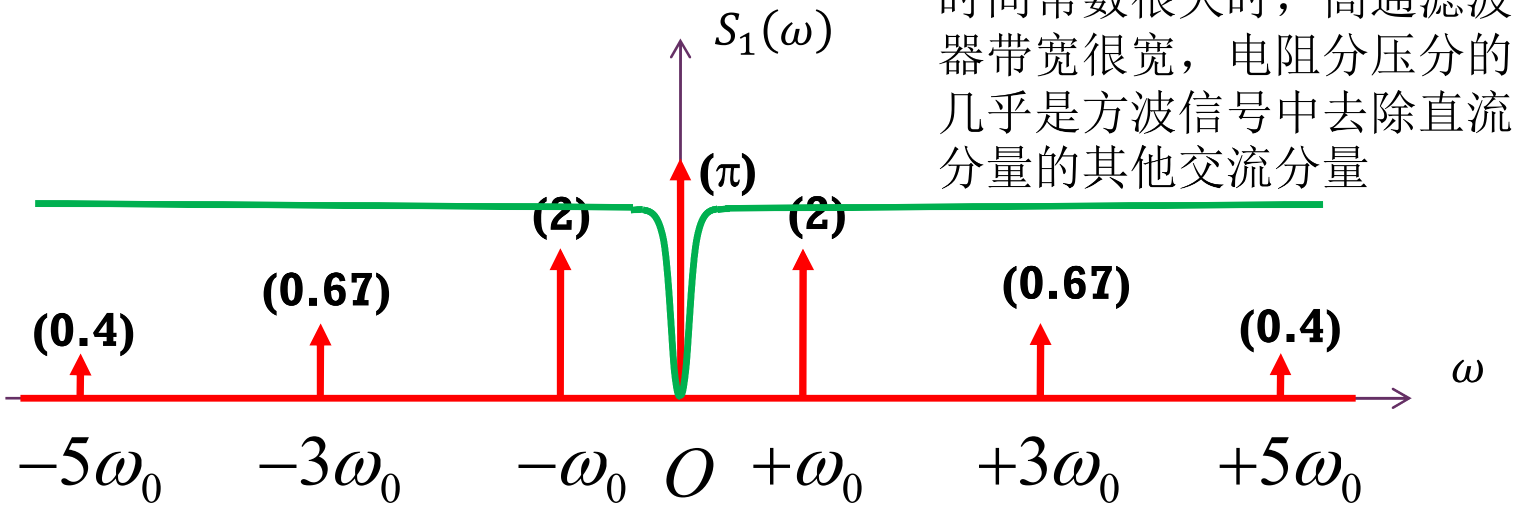
$$V_2=V_{S0}\frac{1}{1+e^{-\frac{0.5T_0}{\tau}}}\approx V_{S0}\frac{1}{1+1-\frac{0.5T_0}{\tau}}=\frac{V_{S0}}{2}\frac{1}{1-\frac{0.5T_0}{2\tau}}\approx\frac{V_{S0}}{2}\left(1+\frac{0.5T_0}{2\tau}\right)$$

频域看

$$\omega_{dB}=\frac{1}{\tau}=\frac{1}{RC}\ll\omega_0=\frac{2\pi}{T}$$

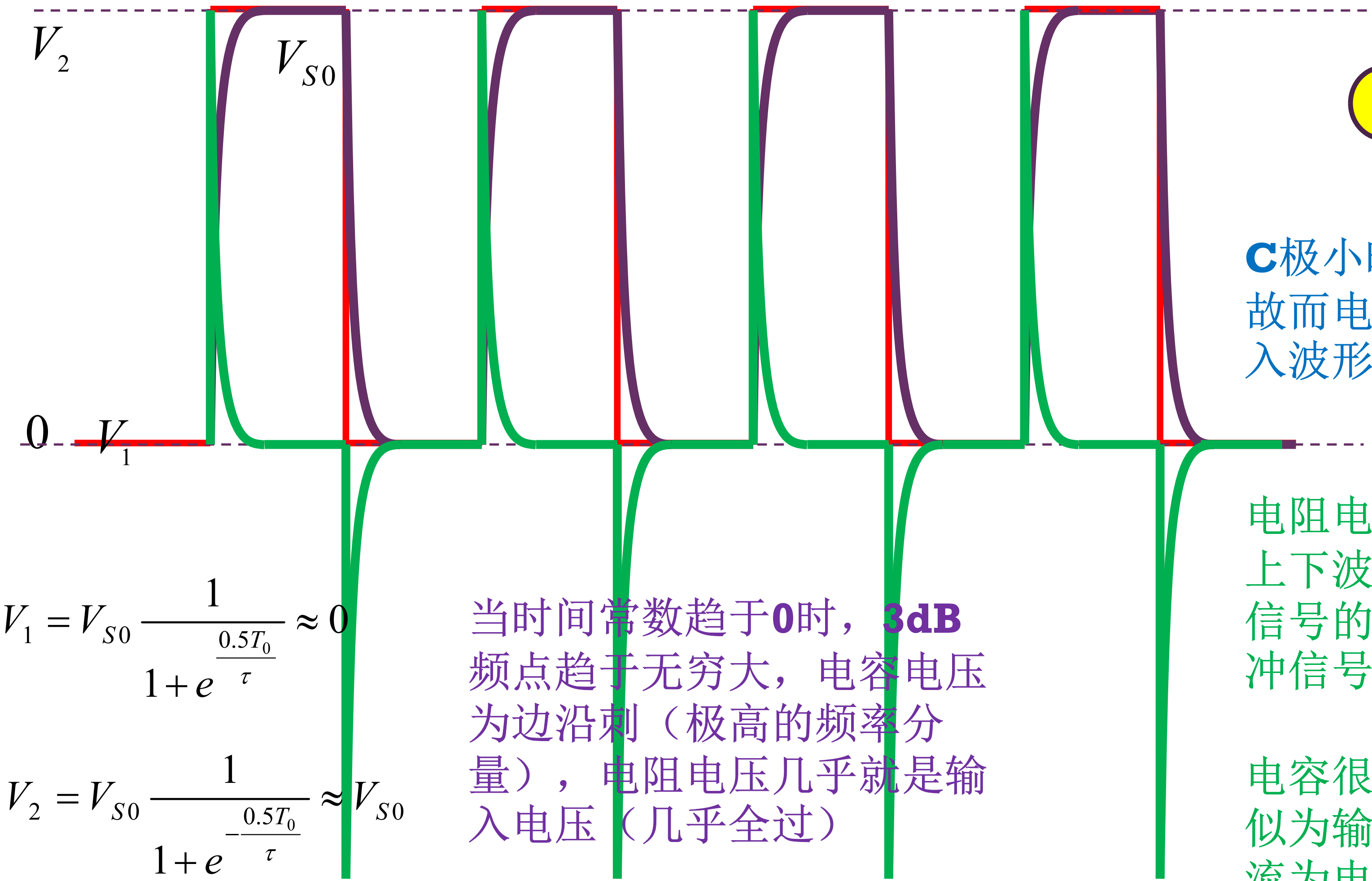


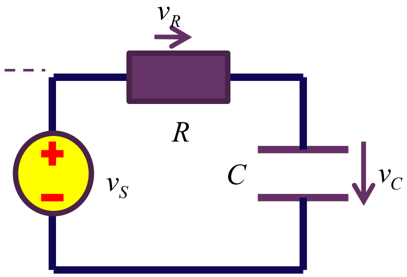
时间常数很大时，低通滤波器带宽很窄，电容分压分的几乎是方波信号中的直流分量



时间常数很大时，高通滤波器带宽很宽，电阻分压分的几乎是方波信号中去除直流分量的其他交流分量

极致2：时间常数很小，3dB频点很大





C极小时，近似开路，故而电容电压近似和输入波形一致

电阻电压在**0V**平均值上下波动，波形为输入信号的微分波形：尖脉冲信号

$$V_1 = V_{S0}\frac{1}{1+e^{\frac{0.5T_0}{\tau}}} \approx 0$$

$$V_2 = V_{S0}\frac{1}{1+e^{-\frac{0.5T_0}{\tau}}} \approx V_{S0}$$

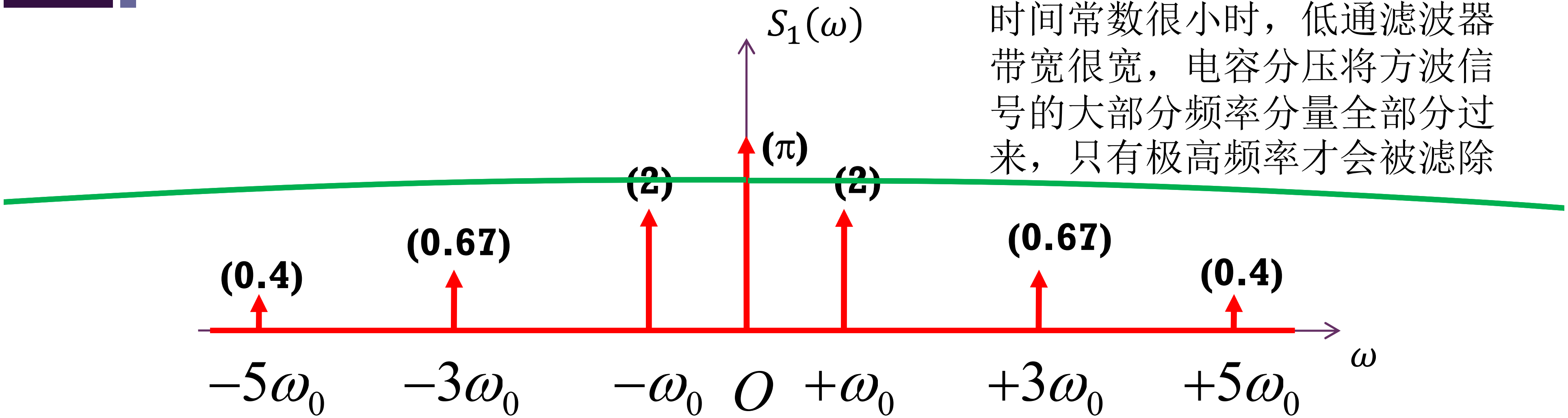
当时间常数趋于**0**时，**3dB**频点趋于无穷大，电容电压为边沿刺（极高的频率分量），电阻电压几乎就是输入电压（几乎全过）

电容很小，电容电压近似为输入电压，电容电流为电容电压的微分，电容电流流过电阻形成脉冲电压波形

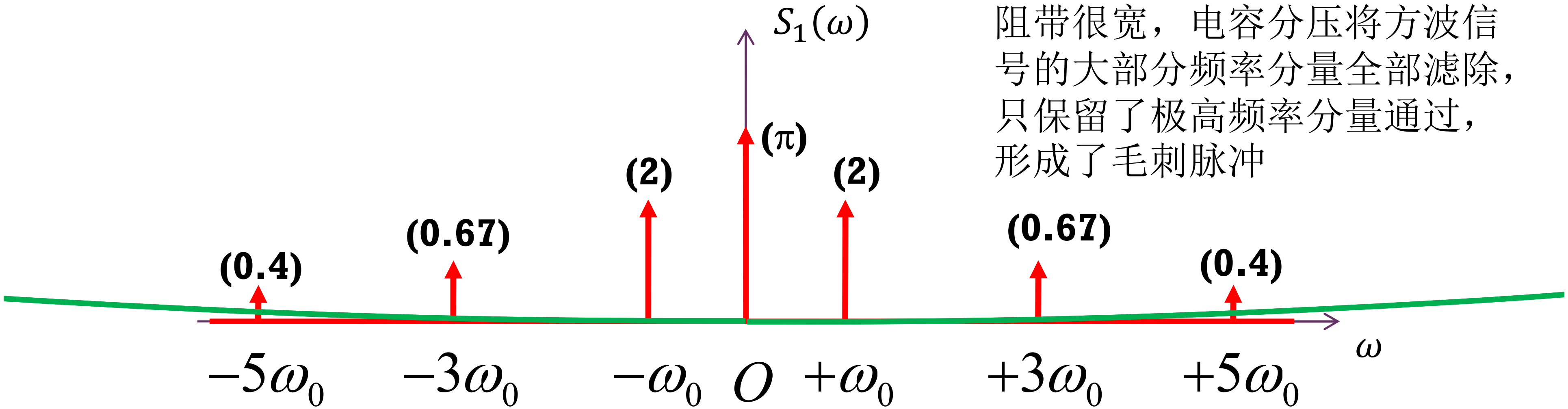
频域看

$$\omega_{dB}=\frac{1}{\tau}=\frac{1}{RC}\gg\omega_0=\frac{2\pi}{T}$$

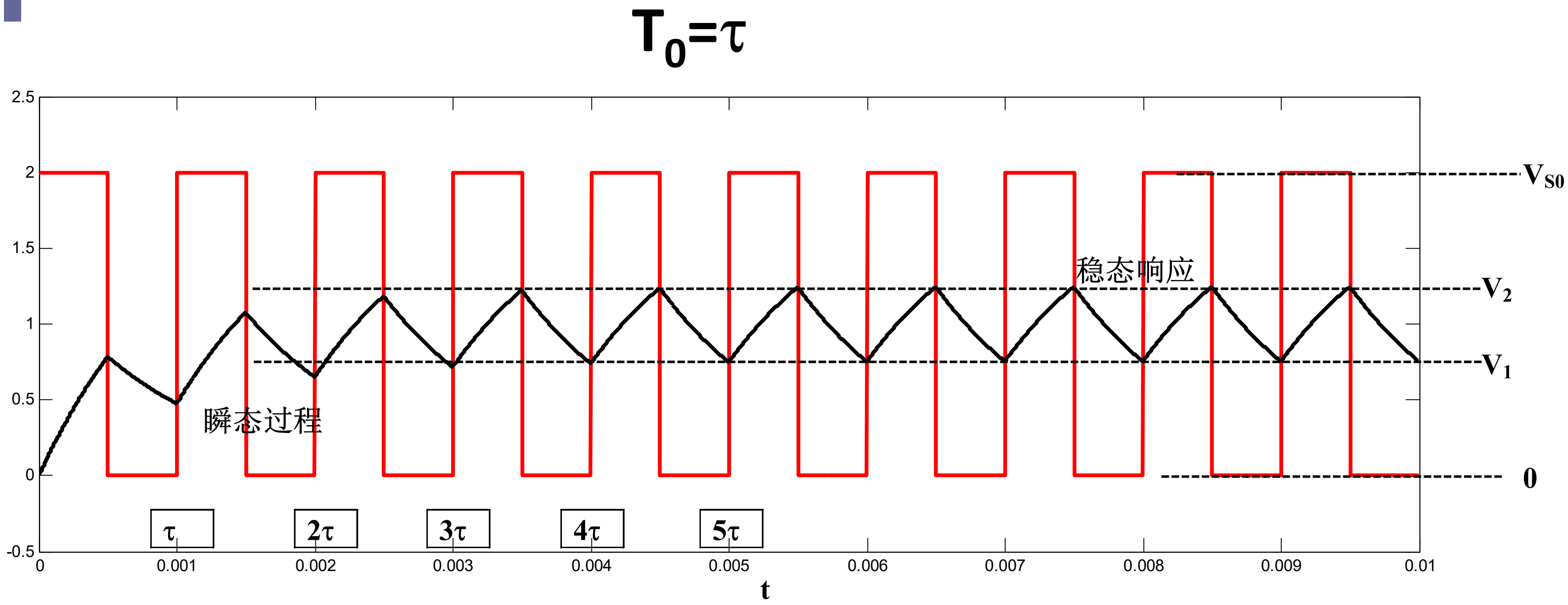
时间常数很小时，低通滤波器带宽很宽，电容分压将方波信号的大部分频率分量全部分过来，只有极高频率才会被滤除



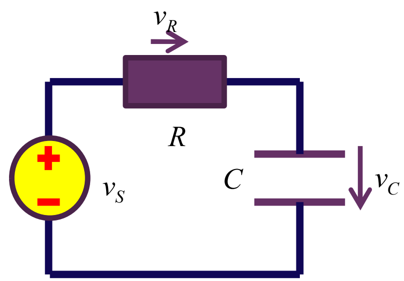
时间常数很小时，高通滤波器阻带很宽，电容分压将方波信号的大部分频率分量全部滤除，只保留了极高频率分量通过，形成了毛刺脉冲



RC分压：在t=0时刻加载方波激励

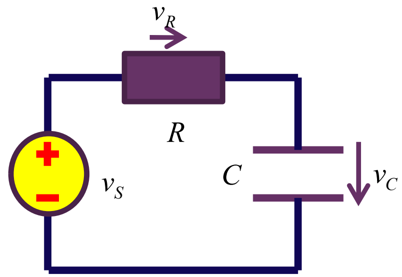


$$v_C(t)=v_{C\infty}(t)+\left(v_C(0^+)-v_{C\infty}(0^+)\right)e^{-\frac{t}{\tau}}=v_{C\infty}(t)-V_{S0}\frac{e^{-\frac{t}{\tau}}}{1+e^{\frac{0.5T_0}{\tau}}}$$

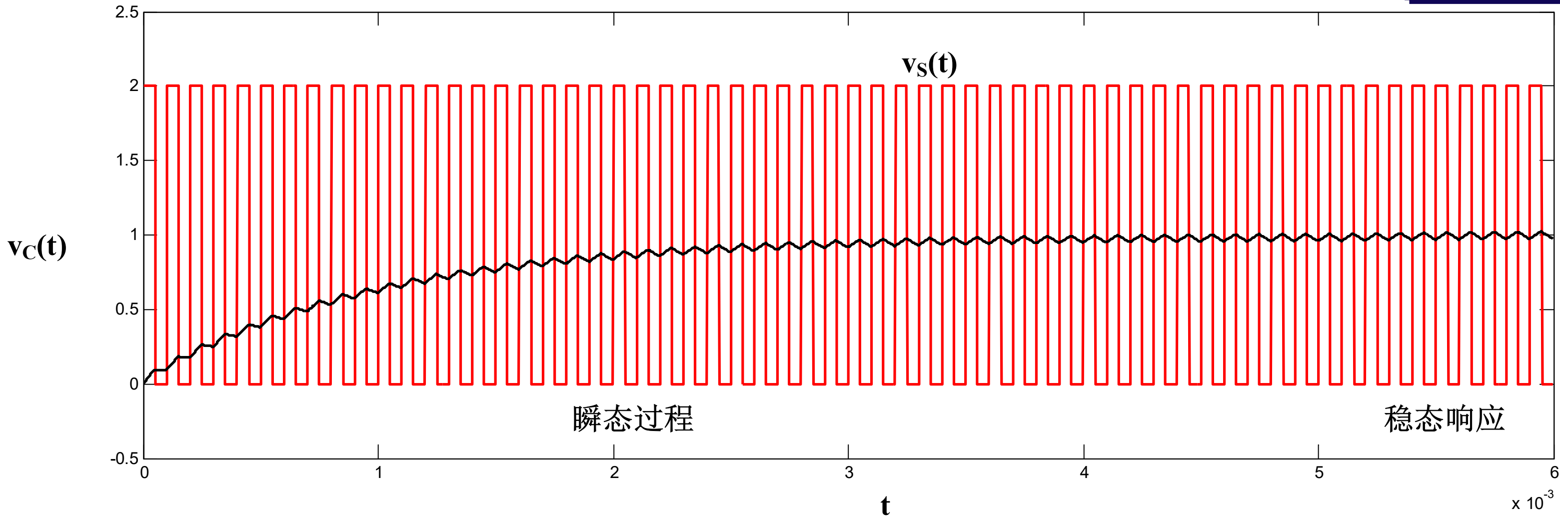


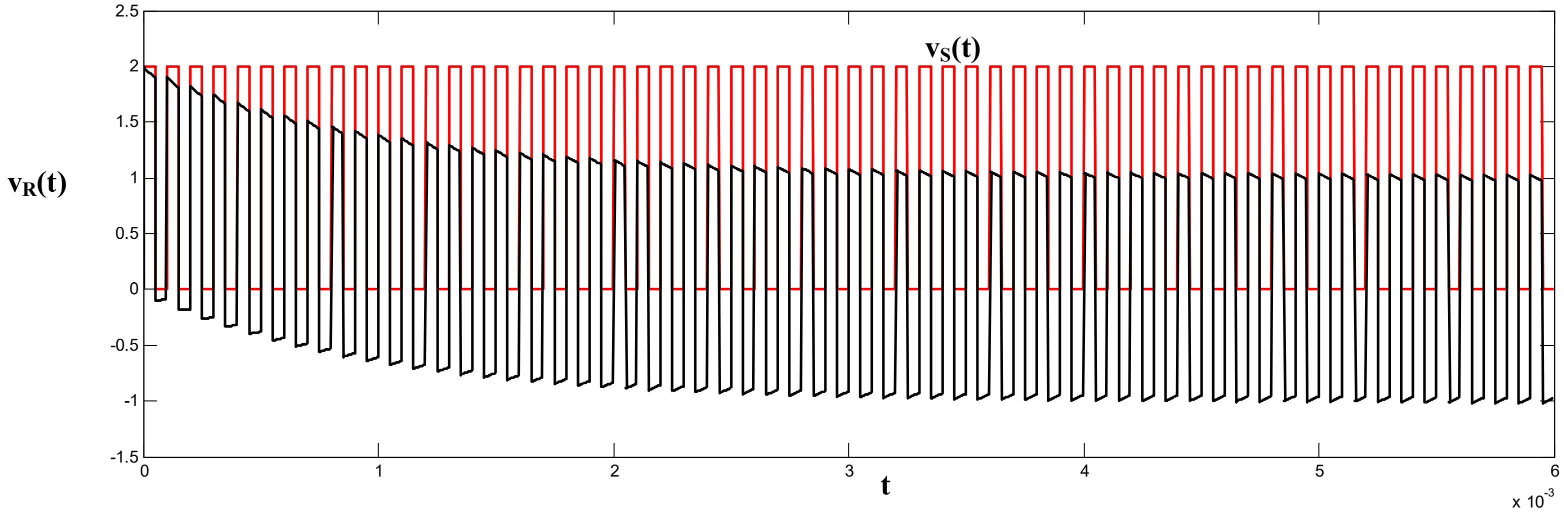
$$v_C(0^+)=0 \qquad \tau=RC \qquad v_{C\infty}(0^+)=V_1=V_{S0}\frac{1}{1+e^{\frac{0.5T_0}{\tau}}}$$

大电容求平均，通交隔直

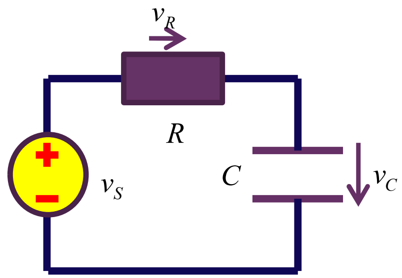


T_0=0.1τ

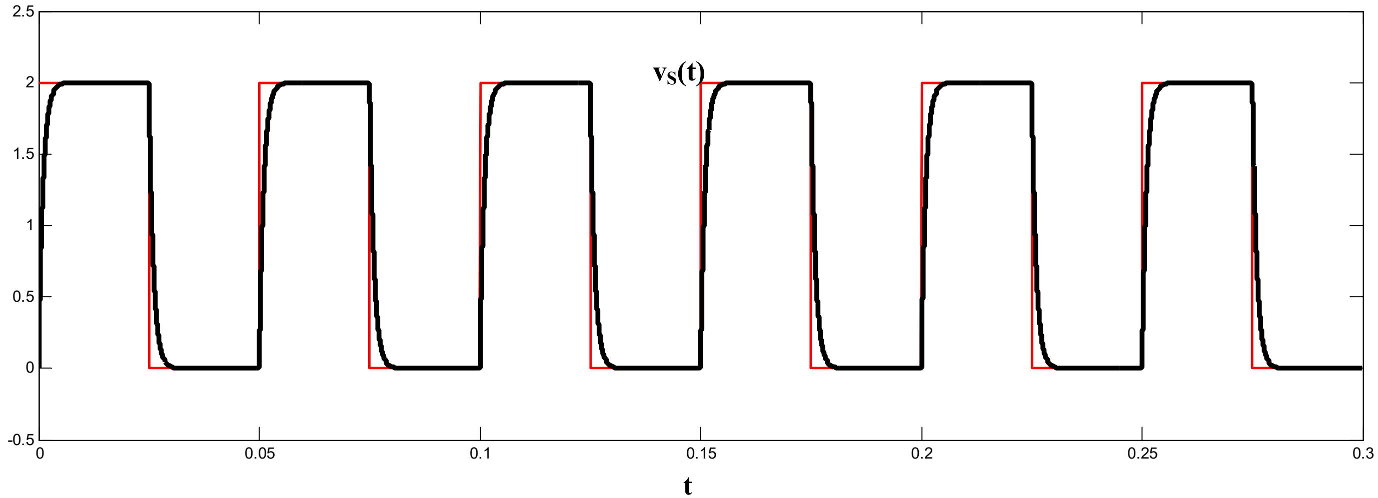


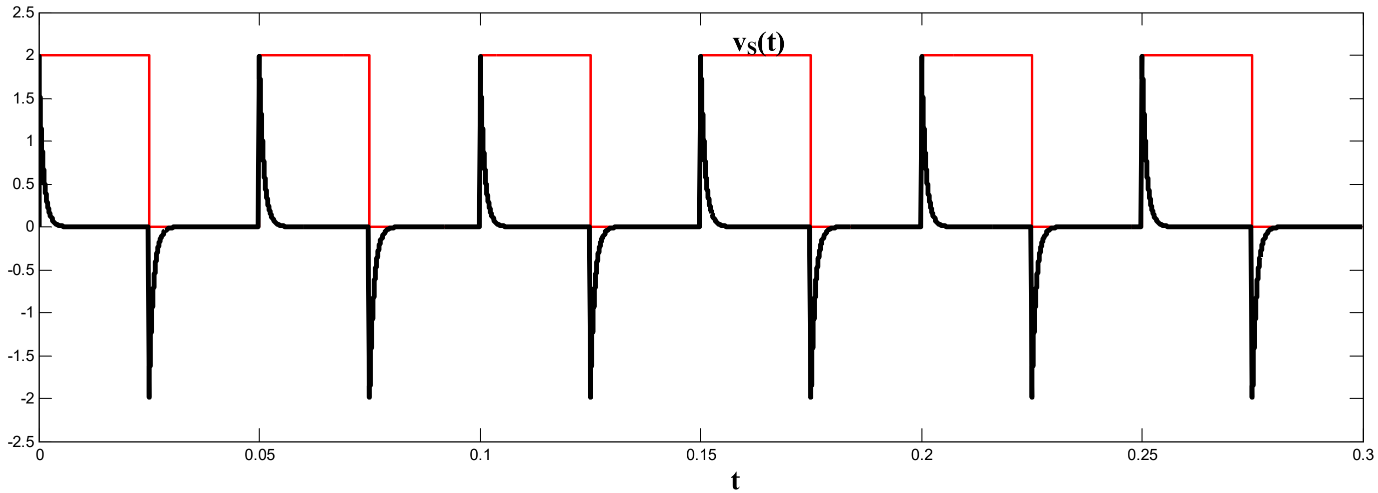


小电容几乎开路
微分波形加载电阻



$T_0=50\tau$





本节小结

- 电压源驱动RC串联电路，电阻R上分压为源信号中的高频分量，电容C上分压为源信号中的低频分量
  - 如果电压源为正弦波电压源，频率越高，R分压越大，频率越低，C分压越大
    - 分压比的分界点为$f_0=\frac{1}{2\pi\tau}=\frac{1}{2\pi RC}$，在此分界点上，电阻和电容分压都是$\frac{1}{\sqrt{2}}$，相位差90°
      - 单频正交信号产生电路
      - f_0 为3dB频点
        - 电容很大时，时间常数很大，3dB频点很小，电容上的分压近似为信号中的极低频分量（积分效应，如方波的平均值）
        - 电容很小时，时间常数很小，3dB频带很大，电阻上的分压近似为信号中的极高频分量（微分效应，如方波的边沿尖毛刺）

- 冲激响应和传递函数是一对傅立叶变换对，分别是LTI系统的时域特性描述和频域特性描述

- 阶跃响应和冲激响应之间具有微积分关系

作业选讲
作业4.4 滤波分析

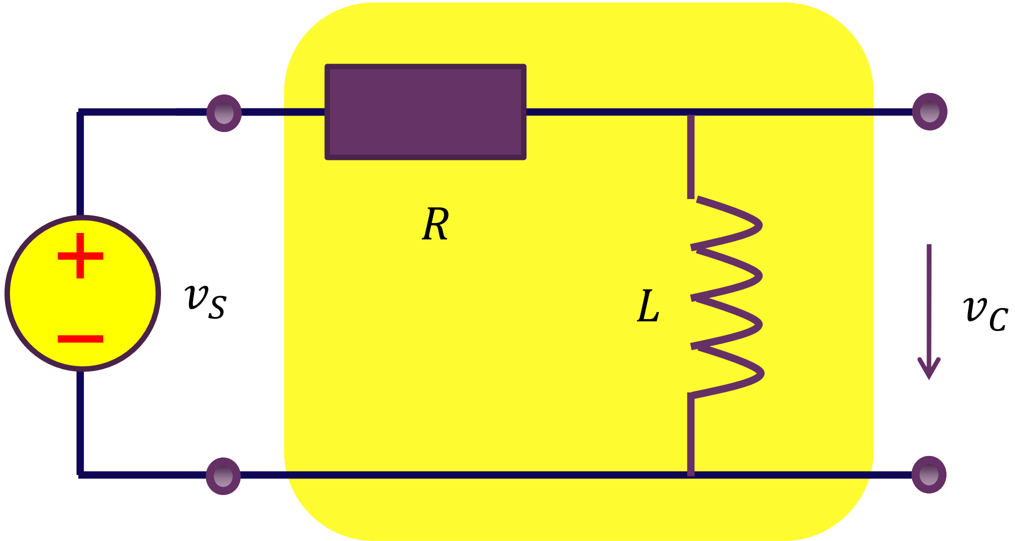
- 滤波器为线性时不变系统，输入单频正弦信号，输出必然是同频的单频正弦信号，只不过幅度和相位有可能发生变化，即
  - 输入$v_i(t)=V_{im}\cos(\omega t+\varphi_i)$，输出$v_o(t)=V_{om}\cos(\omega t+\varphi_o)=A(\omega)V_{im}\cos\left(\omega t+\varphi_i+\varphi(\omega)\right)$

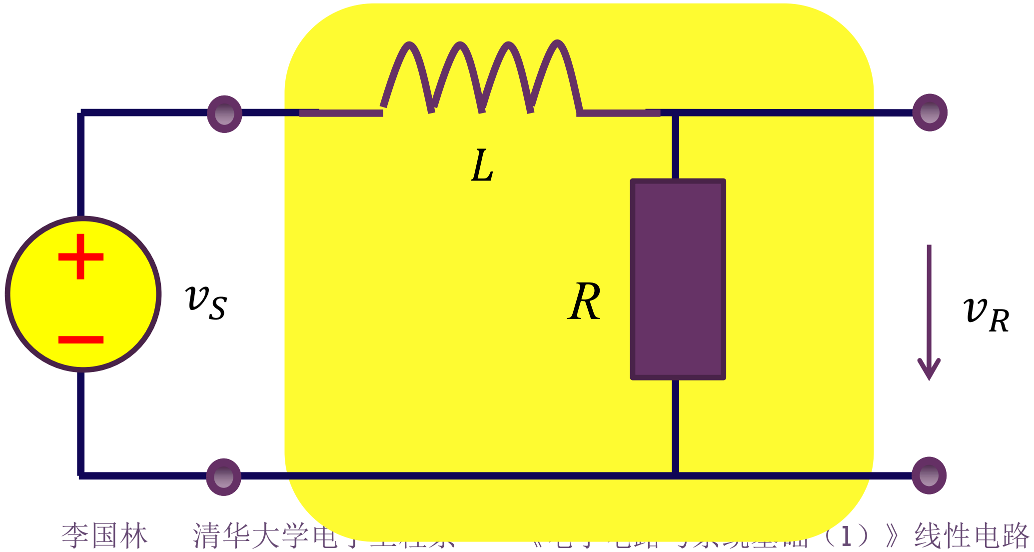
- 将输入输出正弦波表述为旋转矢量形式，问题分析将大大简化
  - 输入$\vec{v}_i(t)=V_{im}e^{j\varphi_i}e^{j\omega t}$，输出$\vec{v}_o(t)=V_{om}e^{j\varphi_o}e^{j\omega t}=A(\omega)V_{im}e^{j\varphi_i}e^{j\varphi(\omega)}e^{j\omega t}=A(\omega)e^{j\varphi(\omega)}\cdot V_{im}e^{j\varphi_i}e^{j\omega t}=H(j\omega)\vec{v}_i(t)$

- 称$H(j\omega)=A(\omega)e^{j\varphi(\omega)}$为滤波器的传递函数，理想低通滤波器通带内幅频特性为常值，相频特性为负斜率直线；通带外信号完全滤除
  - 通带：$A(\omega)=1$，$\varphi(\omega)=-\omega\tau$，$\tau=100\mu s$，$|\omega|<2\pi f_c$，$f_c=6kHz$
  - 阻带：$A(\omega)=0$，其他频率

- 如是，通带内信号将无失真通过，通带外信号全部被滤除。将周期为1ms的方波电压接到上述理想低通滤波器输入端，写出输入信号在通带内的信号，滤波器输出端信号，说明滤波器输出信号是输入通带内信号的无失真传输：$v_o(t)=v_{i,passband}(t-\tau)$
  - $v_i(t)=5S_1(t)$，$S_1(t)=\frac{1}{2}+\frac{2}{\pi}\cos\omega_0 t-\frac{2}{3\pi}\cos 3\omega_0 t+\frac{2}{5\pi}\cos 5\omega_0 t-\ldots$
  - $v_{i,passband}(t)=?$
  - $v_o(t)=?$ （利用线性系统的叠加性）

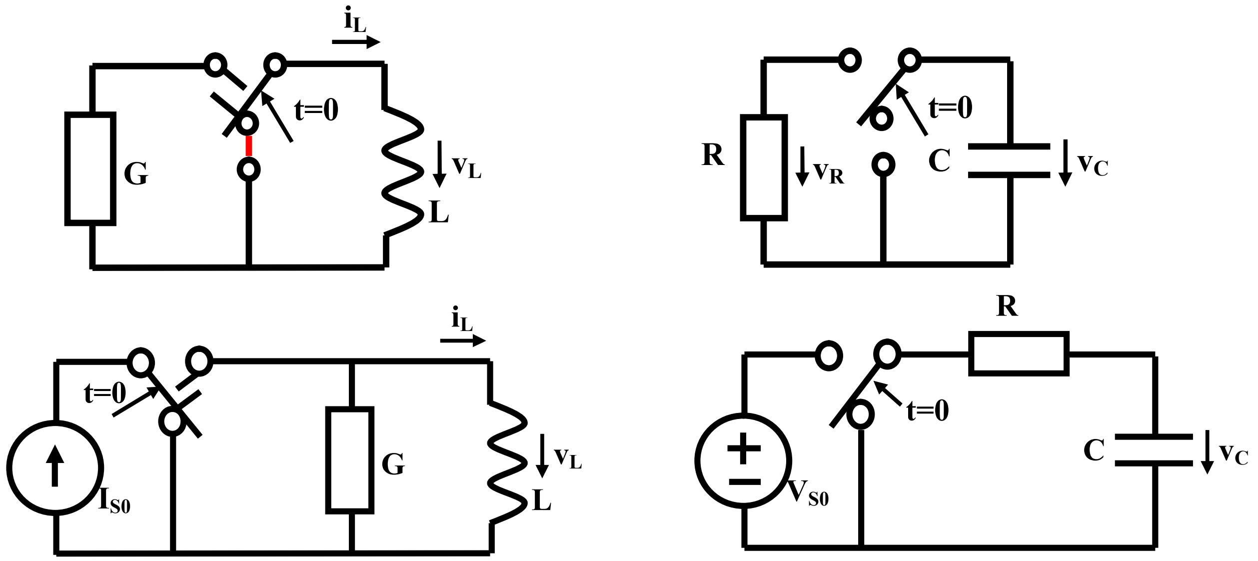
作业1 一阶RL电路的时频分析





- 请对左侧两个一阶RL电路进行时频分析
  - 频域传递函数，说明低通高通类型
  - 时域冲激响应、阶跃响应分析（三要素法）
  - 验证阶跃响应的微分等于冲激响应
  - （选作）验证冲激响应的傅立叶变换为传递函数

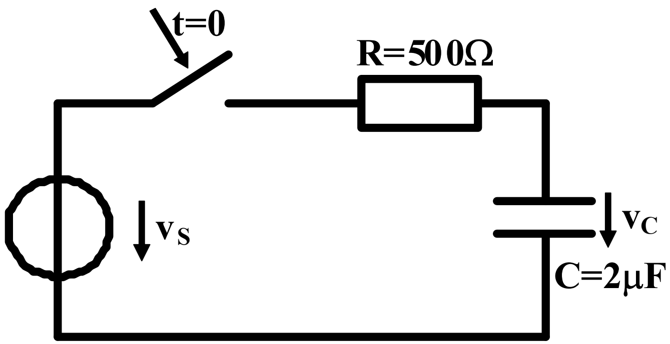
作业2 画出放磁曲线、充磁曲线



- 对照其对偶电路一阶RC电路，分析电感放磁、电感充磁形态和电容放电、电容充电形态一致（对偶描述）
  - 画出放磁曲线，充磁曲线
  - 描述放磁过程，充磁过程
    - t=0开关拨动，开关推上去瞬间，电感电流不能突变，$i_L(0^+) = i_L(0^-) = I_0$，电感电流流过电阻形成放磁电压，$v_L(0^+) = v_R(0^+) = -I_0R$，该放磁电压使得电感电流随时间以斜率$\frac{I_0R}{L} = \frac{I_0}{\tau}$下降，于是放磁电压随之降低，电感电流下降速率随之下降，从而形成以时间常数τ形式的指数衰减规律下降，直至电感电流衰减为0，放磁电压为0，电感电流保持不变，达到稳态。

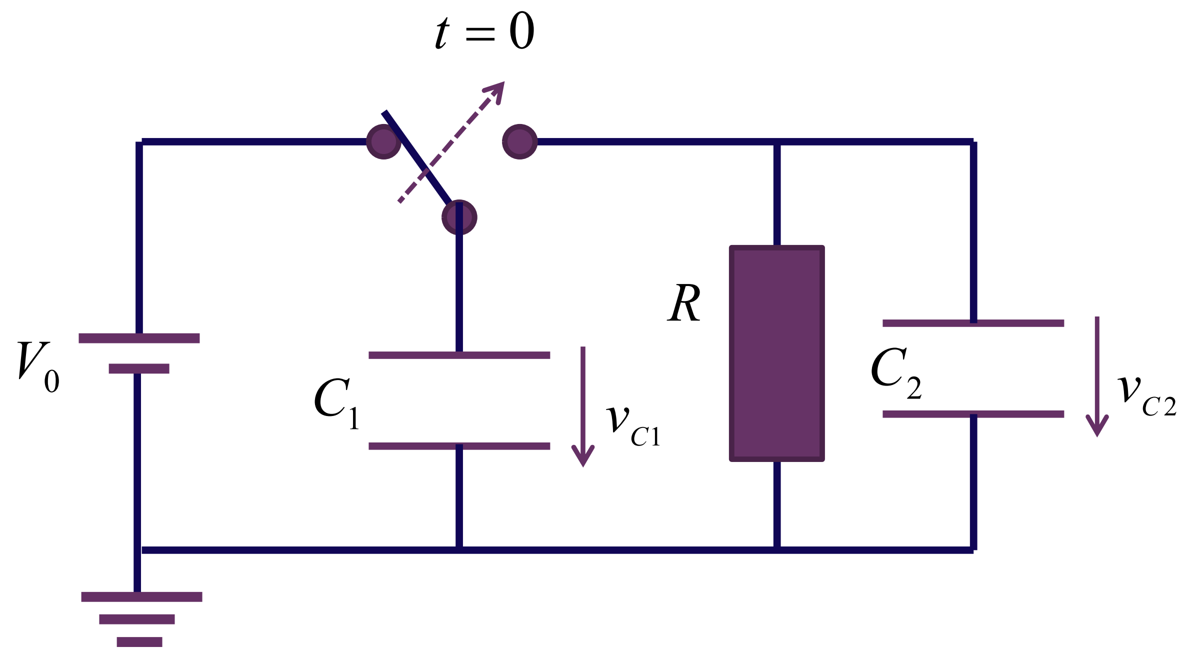
作业3 三要素法求解正弦激励

- 如图所示，t=0时刻开关闭合，正弦波电压激励源加载到一阶RC串联电路端口
  - 其中，$$v_S(t)=2\cos\omega_0 t$$
    $$\omega_0=2\pi f_0 \qquad f_0=500Hz$$
- 假设电容初始电压为0，$v_C(0)=0$，请给出电容电压时域表达式



作业4 电容电压出现跳变

- 在t=0时刻，将开关拨向右侧电路，求电容C_1、C_2两端电压变化规律，写出表达式，画出时域波形



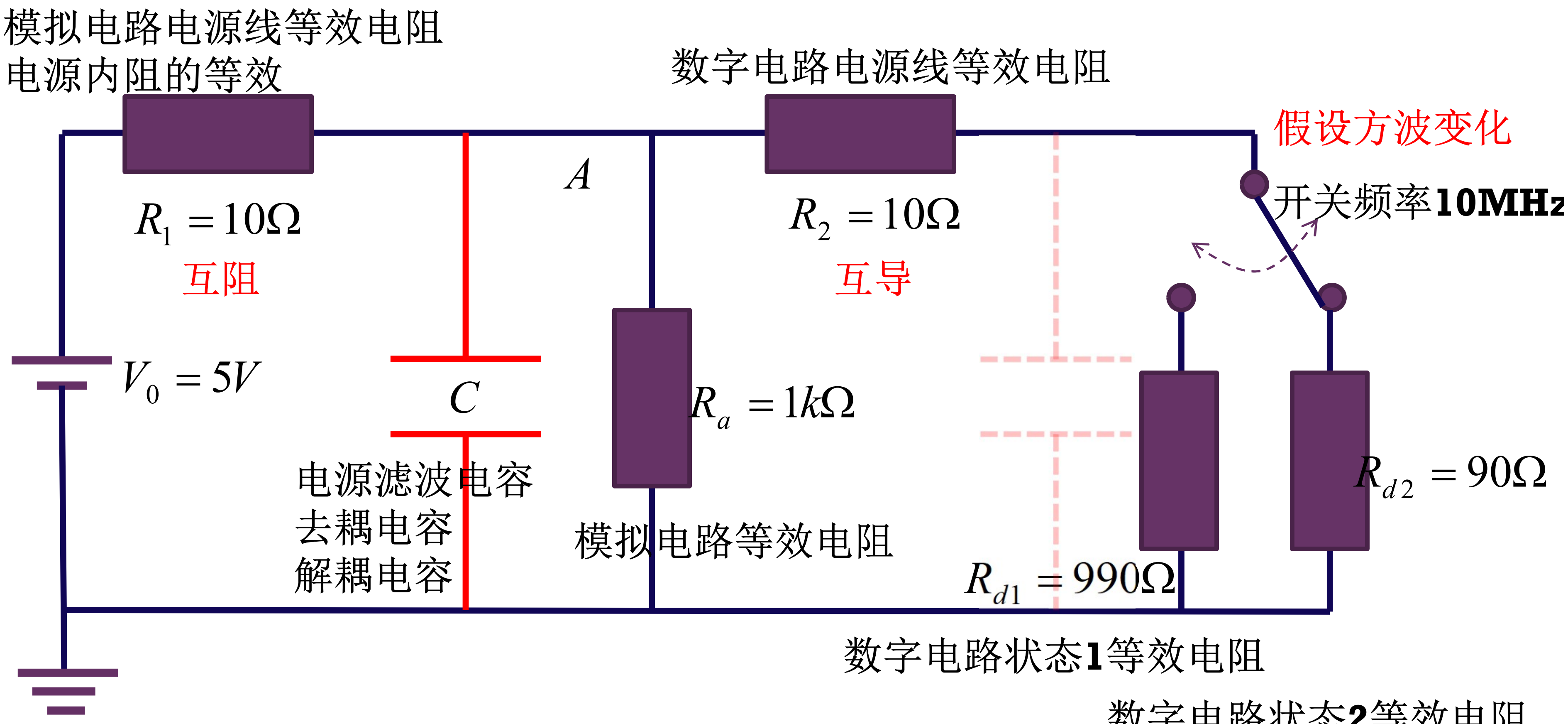
作业5 一阶滤波器设计

- 设计一个RC低通滤波器，使得其3dB带宽为10MHz，已知信源内阻为50Ω，负载电阻为50Ω
  - 画出其幅频特性和相频特性（画伯特图）
  - 请再设计一个高通滤波器，3dB频点也在10MHz，画出伯特图。
  - 选作：如果用RL滤波器，滤波器形态怎样？参数如何设定？

作业6 用电容做电源滤波（选作）

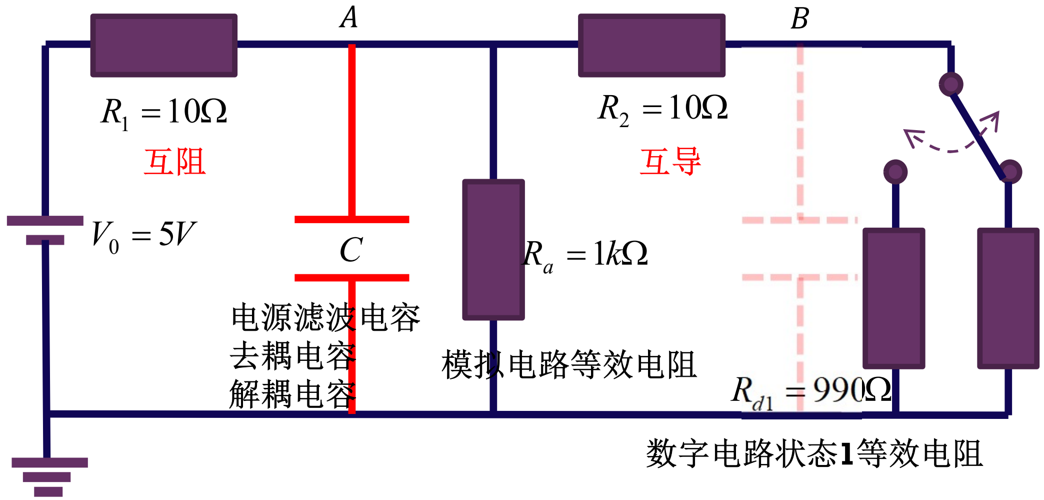
教材**P677**：练习**9.2.8**，对此题背景有详细的描述

- 1）假设没有滤波电容，求模拟电路电源端A点的电压波形
- 2）多大的电容，可以使得A点电压波形起伏是没有电容时的1/10



CAD 仿真作业

- 题6计算获得电容值，置于A位置，仿真确认满足设计要求
  - 题6未做的，仿真获得电容取值
- 将电容从A位置移到B位置，仿真，说明是否满足设计要求
- 将电容拆分为两个电容，分别置于A，B两个位置，…
- 将电容拆分为3个电容，置于A，B及互导电阻中间，…
- 将电容拆分为4个电容，置于A，B及互导、互阻电阻中间，…
- 总结：功能电路的去耦电容应该置于什么位置最好?
- 继续研究：模拟电路还是数字电路离电源更近了好?



本节课内容在教材中的章节对应

- P689-698: 一阶时频分析
- P674-678: 方波激励
- P679-689： 冲激响应和阶跃响应