第6讲：稳态与瞬态

李国林

清华大学电子工程系

B班课程内容安排

第一学期：线性	序号	第二学期：非线性
电路定律	1	器件基础
电阻电源	2	二极管
电容电感	3	**MOSFET**
信号分析	4	**BJT**
分压分流	5	反相电路
正弦稳态	**6**	数字门
时频特性	7	放大器
期中复习	8	期中复习
RLC二阶	9	负反馈
二阶时频	10	差分放大
受控源	11	频率特性
网络参量	12	正反馈
典型网络	13	振荡器
作业选讲	14	作业选讲
期末复习	15	期末复习

稳态与瞬态 内容

- RC分压分析
  - 直流激励
  - 阶跃激励
  - 正弦激励：引入稳态与瞬态概念
    - 三角函数运算回顾
    - $t = -\infty$时加载正弦波：只有稳态响应
      - 相量法
    - $t = 0$时加载正弦波：既有稳态响应，又有瞬态响应
      - 三要素法
        - 戴维南定理
  - 冲激激励
  - 方波激励

电路所处理的信号都可以傅立叶分解为正弦信号的叠加形式或积分形式，因而理论上线性时不变电路系统分析，均可做正弦激励下的稳态分析，根据叠加定理，真实信号的响应是构成真实信号正弦波信号分响应之和（或积分），因此正弦激励下的稳态响应分析（相量法分析）是本节课要点内容

有稳态响应，就是瞬态响应，本节将把稳态与瞬态概念推广到任意信号激励情况

1. 对三角函数运算规则的回顾

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$$

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$$

和角公式

$$\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)=2\cos\alpha\cos\beta$$

$$\cos\alpha\cos\beta=\frac{\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)}{2}$$

$$\sin\alpha\sin\beta=\frac{\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)}{2}$$

积化和差公式

$$\cos^2\alpha=\frac{1+\cos 2\alpha}{2}$$

$$\sin^2\alpha=\frac{1-\cos 2\alpha}{2}$$

$$\begin{aligned}\cos^3\alpha&=\cos^2\alpha\cos\alpha\\&=\frac{1+\cos 2\alpha}{2}\cos\alpha\\&=\frac{\cos\alpha+\cos\alpha\cos 2\alpha}{2}\\&=\frac{\cos\alpha+\frac{\cos\alpha+\cos 3\alpha}{2}}{2}\\&=\frac{3\cos\alpha+\cos 3\alpha}{4}\end{aligned}$$

三角函数的一些运算规则

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$$

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$$

和角公式

$$\sin\alpha\cos\beta=\frac{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)}{2}$$

$$\cos\alpha\sin\beta=\frac{\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)}{2}$$

积化和差公式

$$\sin^3\alpha=\sin^2\alpha\sin\alpha$$

$$=\frac{1-\cos 2\alpha}{2}\sin\alpha$$

$$=\frac{\sin\alpha-\sin\alpha\cos 2\alpha}{2}$$

$$=\frac{\sin\alpha-\dfrac{\sin 3\alpha-\sin\alpha}{2}}{2}$$

$$=\frac{3\sin\alpha-\sin 3\alpha}{4}$$

两个同频正弦波叠加

$\boldsymbol{A\cos\omega t + B\sin\omega t}$

$$= \sqrt{A^2+B^2}\left(\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}\cos\omega t + \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}\sin\omega t\right)$$

$$= \sqrt{A^2+B^2}(\cos\varphi\cos\omega t + \sin\varphi\sin\omega t)$$

$$\varphi = \arctan\frac{B}{A}$$

$$= \sqrt{A^2+B^2}\cos(\omega t - \varphi)$$

一般默认情况 $A > 0$

$$\boldsymbol{= \sqrt{A^2+B^2}\cos\left(\omega t - \arctan\frac{B}{A}\right)}$$

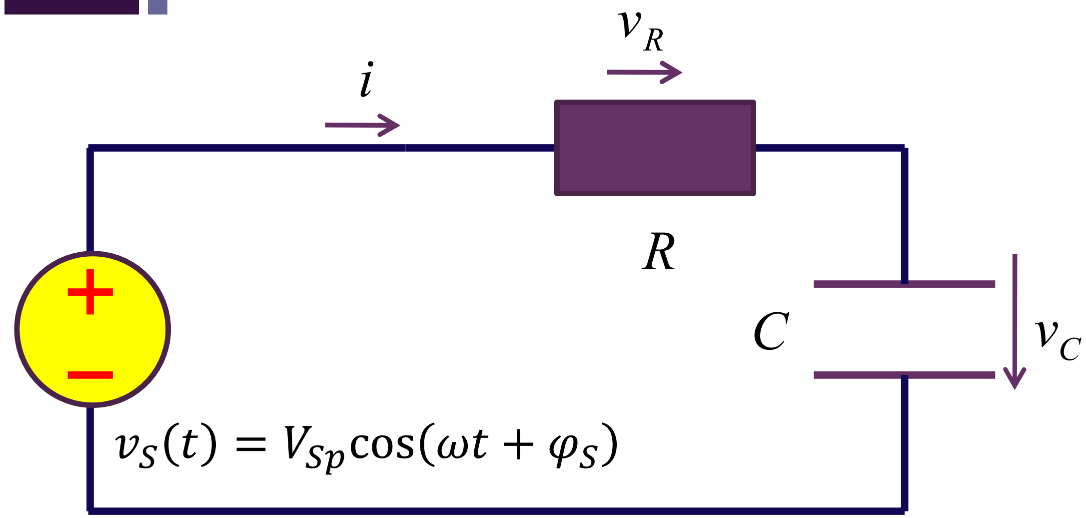
$$\varphi = \arctan\frac{B}{A} + \pi$$

$A < 0$

对正弦信号的微分运算

$$\frac{d}{dt}\cos\omega t = -\omega\sin\omega t \qquad \frac{d}{dt}\sin\omega t = \omega\cos\omega t$$

2. RC分压： $t = -\infty$时加载正弦激励



$$v_S(t) = v_R(t) + v_C(t)$$

$$= i_R(t)R + v_C(t)$$

$$= i_C(t)R + v_C(t)$$

$$= RC\frac{d}{dt}v_C(t) + v_C(t)$$

电路方程为

$$RC\frac{d}{dt}v_C(t) + v_C(t) = v_S(t)$$

$$v_S(t) = V_{Sp}\cos(\omega t + \varphi_S)$$

由于单频正弦信号是在$t = -\infty$时加载的，因而不存在电容初始电压问题：即使电容有初始电压，根据叠加定理，该初始电压导致的分响应（电容放电指数衰减函数）也已经衰减为**0**了，因而$t = -\infty$加载信号分析时，均不考虑电容初值问题，只考虑外加激励导致的响应： $t = -\infty$加载信号的分析，均属稳态分析：足够长时间，系统进入稳态

线性时不变电路不会产生新的频率分量，故而正弦激励的稳态响应只能是同频正弦信号

$$v_C(t) = V_{Cp}\cos(\omega t + \varphi_C)$$

用三角函数运算进行求解

$$v_C(t) = V_{Cp}\cos(\omega t + \varphi_C) \qquad\qquad v_S(t) = V_{Sp}\cos(\omega t + \varphi_S)$$

$$RC\frac{d}{dt}v_C(t) + v_C(t) = v_S(t)$$

$$-RCV_{Cp}\omega\sin(\omega t + \varphi_C) + V_{Cp}\cos(\omega t + \varphi_C) = V_{Sp}\cos(\omega t + \varphi_S)$$

$$-\omega RC\sin(\omega t + \varphi_C) + \cos(\omega t + \varphi_C) = \frac{V_{Sp}}{V_{Cp}}\cos(\omega t + \varphi_S)$$

$$-\frac{\omega RC}{\sqrt{1+(\omega RC)^2}}\sin(\omega t + \varphi_C) + \frac{1}{\sqrt{1+(\omega RC)^2}}\cos(\omega t + \varphi_C) = \frac{V_{Sp}}{V_{Cp}\sqrt{1+(\omega RC)^2}}\cos(\omega t + \varphi_S)$$

$\tan\varphi = \omega RC$

$$-\sin\varphi\sin(\omega t + \varphi_C) + \cos\varphi\cos(\omega t + \varphi_C) = \frac{V_{Sp}}{V_{Cp}\sqrt{1+(\omega RC)^2}}\cos(\omega t + \varphi_S)$$

$\varphi = \arctan(\omega RC)$

$$\cos(\omega t + \varphi_C + \varphi) = \frac{V_{Sp}}{V_{Cp}\sqrt{1+(\omega RC)^2}}\cos(\omega t + \varphi_S)$$

电容分压大小

$$\varphi = \arctan(\omega RC)$$

$$\cos(\omega t + \varphi_C + \varphi) = \frac{V_{Sp}}{V_{Cp}\sqrt{1 + (\omega RC)^2}}\cos(\omega t + \varphi_S)$$

$$\varphi_C + \varphi = \varphi_S \qquad V_{Cp}\sqrt{1 + (\omega RC)^2} = V_{Sp}$$

$$\varphi_C = \varphi_S - \varphi \qquad V_{Cp} = \frac{V_{Sp}}{\sqrt{1 + (\omega RC)^2}}$$

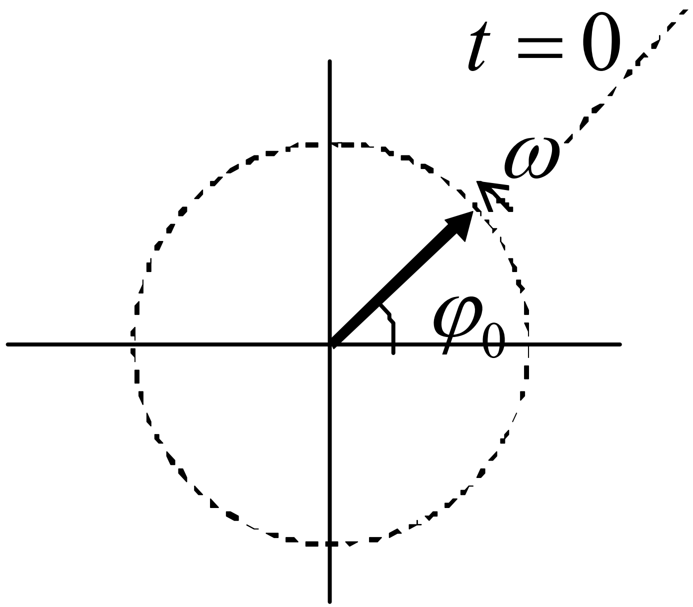
$$v_S(t) = V_{Sp}\cos(\omega t + \varphi_S)$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v_C(t)} &= \boldsymbol{V_{Cp}\cos(\omega t + \varphi_C)} \\ &= \boldsymbol{\frac{V_{Sp}}{\sqrt{1 + (\omega RC)^2}}\cos\left(\omega t + \varphi_S - \arctan(\omega RC)\right)} \end{aligned}$$

上述三角函数分析对一阶电路是可以接受的，但是对于高阶电路，三角函数运算将会很容易出错：**LTI**电路系统的正弦稳态分析，一般采用相量法进行分析

什么是相量?

回顾：正弦波的旋转矢量表述



$$\varphi(t) = \omega t + \varphi_0$$

$$s(t) = x(t) + jy(t)$$

$$= A_p \cos \varphi(t) + jA_p \sin \varphi(t)$$

$$= A_p e^{j\varphi(t)}$$

$$= A_p e^{j(\omega t+\varphi_0)}$$

$$x(t) = \mathrm{Re}\, s(t) = \boldsymbol{A_p \cos(\omega t + \varphi_0)}$$

$$y(t) = \mathrm{Im}\, s(t) = A_p \sin(\omega t + \varphi_0)$$

旋转矢量表述的优点

微分运算被转化为乘法运算

$$s(t) = A_p e^{j(\omega t + \varphi_0)} \qquad x(t) = \operatorname{Re} s(t) = A_p \cos(\omega t + \varphi_0)$$

$$\frac{ds(t)}{dt} = j\omega \cdot s(t) = j\omega A_p e^{j(\omega t + \varphi_0)} = \omega A_p e^{j\left(\omega t + \varphi_0 + \frac{\pi}{2}\right)}$$

复数表述下，时间微分是简单的乘**jω**运算

$$\operatorname{Re}\frac{ds(t)}{dt} = \omega A_p \cos\left(\omega t + \varphi_0 + \frac{\pi}{2}\right) = -\omega A_p \sin(\omega t + \varphi_0) = \frac{dx(t)}{dt}$$

$$\frac{ds}{dt} = \frac{d(x + jy)}{dt} = \frac{dx}{dt} + j\frac{dy}{dt}$$

微分运算是线性算子

旋转矢量表述的优点

积分运算被转化为除法运算

- 负无穷点初始值为零

$$s(t) = A_p e^{j(\omega t + \varphi_0)} \qquad x(t) = \mathrm{Re}\, s(t) = A_p \cos(\omega t + \varphi_0)$$

$$\int_{-\infty}^{t} s(t)dt = \frac{s(t)}{j\omega} = \frac{1}{j\omega} A_p e^{j(\omega t + \varphi_0)} = \frac{A_p}{\omega} e^{j\left(\omega t + \varphi_0 - \frac{\pi}{2}\right)}$$

复数表述的时间积分为简单的除jω运算

$$\mathrm{Re} \int_{-\infty}^{t} s(t)dt = \frac{A_p}{\omega} \cos\left(\omega t + \varphi_0 - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{A_p}{\omega} \sin(\omega t + \varphi_0) = \int_{-\infty}^{t} x(t)dt$$

$$\int_{-\infty}^{t} sdt = \int_{-\infty}^{t} (x + jy)dt = \int_{-\infty}^{t} xdt + j\int_{-\infty}^{t} ydt$$

设定初始状态为零，则积分运算也是线性算子

相量引入

- 线性时不变电路在正弦激励下进入稳态后，电路中只有一个单频分量，所有支路电压、支路电流都是单频正弦波，仅仅是该正弦波的幅度相位需要确定，因而只需关注正弦波的幅度相位即可，幅度相位表述的复数就是相量。
  - 在确定频率下，一个相量对应一个正弦波

$$i(t) = I_p \cos(\omega t + \varphi_I)$$

正弦波电流的时域表述形式

$$v(t) = V_p \cos(\omega t + \varphi_V)$$

正弦波电压的时域表述形式

$$\overrightarrow{i(t)} = I_p e^{j(\omega t + \varphi_I)} = \left(I_p e^{j\varphi_I}\right) e^{j\omega t}$$

旋转矢量表述形式

$$\overrightarrow{v(t)} = V_p e^{j(\omega t + \varphi_V)} = \left(V_p e^{j\varphi_V}\right) e^{j\omega t}$$

旋转矢量表述形式

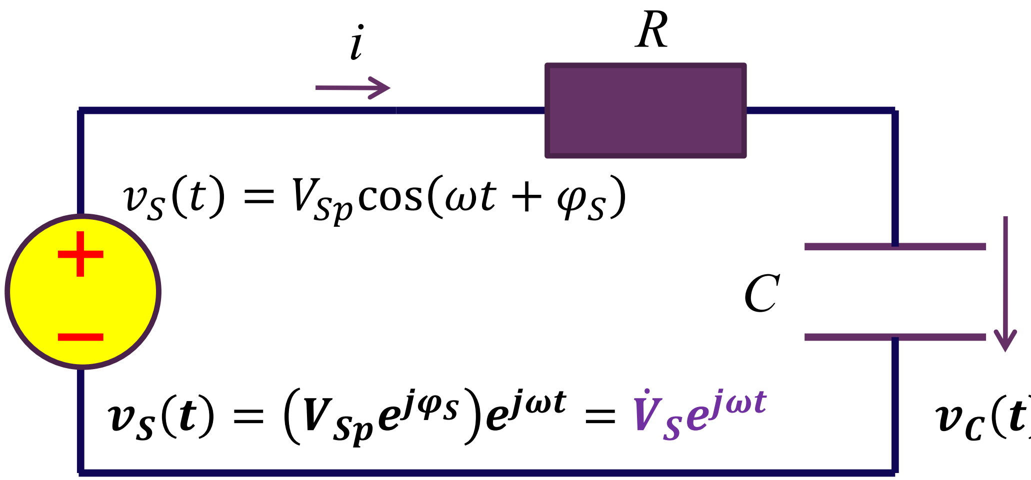
$$\dot{I} = I_p e^{j\varphi_I} = I_p \angle \varphi_I$$

相量表述形式

$$\dot{V} = V_p e^{j\varphi_V} = V_p \angle \varphi_V$$

相量表述形式

用旋转矢量替代正弦信号



$v_S(t) = V_{Sp}\cos(\omega t + \varphi_S)$

$v_C(t) = V_{Cp}\cos(\omega t + \varphi_C)$

$\boldsymbol{v_S(t) = \left(V_{Sp}e^{j\varphi_S}\right)e^{j\omega t} = \dot{V}_S e^{j\omega t}}$

$\boldsymbol{v_C(t) = \left(V_{Cp}e^{j\varphi_V}\right)e^{j\omega t} = \dot{V}_C e^{j\omega t}}$

时域微分方程：

$$RC\frac{d}{dt}v_C(t) + v_C(t) = v_S(t)$$

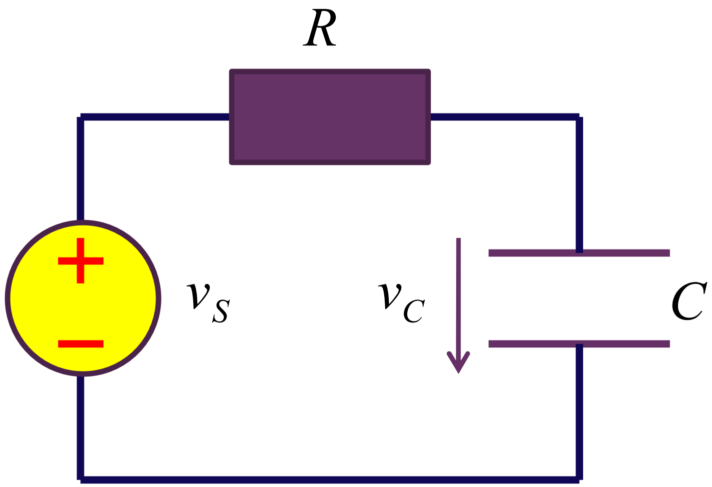
$$RC\frac{d\dot{V}_C e^{j\omega t}}{dt} + \dot{V}_C e^{j\omega t} = \dot{V}_S e^{j\omega t}$$

$$j\omega RC\dot{V}_C e^{j\omega t} + \dot{V}_C e^{j\omega t} = \dot{V}_S e^{j\omega t}$$

频域相量方程：

$$j\omega RC\dot{V}_C + \dot{V}_C = \dot{V}_S \qquad j\omega RC\dot{V}_C(j\omega) + \dot{V}_C(j\omega) = \dot{V}_S(j\omega)$$

运算大大简化



$$j\omega RC\dot{V}_C+\dot{V}_C=\dot{V}_S$$

$$(1+j\omega RC)\dot{V}_C=\dot{V}_S\qquad(1+j\omega\tau)\dot{V}_C=\dot{V}_S$$

$$\left[\sqrt{1+(\omega\tau)^2}\angle\arctan\omega\tau\right]\cdot\dot{V}_C=\dot{V}_S$$

$$\boldsymbol{v_S(t)=V_{Sp}\cos(\omega t+\varphi_S)}$$

$$\left[\sqrt{1+(\omega\tau)^2}\angle\arctan\omega\tau\right]\cdot V_{Cp}\angle\varphi_C=V_{Sp}\angle\varphi_S$$

$$\sqrt{1+(\omega\tau)^2}\cdot V_{Cp}=V_{Sp}\qquad V_{Cp}=\frac{V_{Sp}}{\sqrt{1+(\omega\tau)^2}}$$

$$\varphi_C+\arctan\omega\tau=\varphi_S\qquad\varphi_C=\varphi_S-\arctan\omega\tau$$

$$\boldsymbol{v_C(t)=\frac{V_{Sp}}{\sqrt{1+(\omega\tau)^2}}\cos(\omega t+\varphi_S-\arctan\omega\tau)}$$

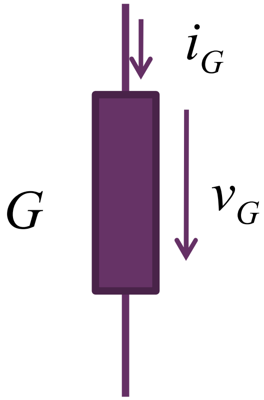
电容、电感的相量法表述

- 实际电路分析时，我们更喜欢用电路概念解题，如分压、分流、等效电阻等，而不是每次都通过列方程求解
  - 列方程求解属于第一次碰到的电路问题，你还不了解它，不得不通过“列方程、解方程、对解进行解析获得电路功能”这个完整的电路分析过程理解该电路
  - 对于简单结构、熟悉结构、确定结构，多采用电路概念分析，因此需要在相量域直接用乘除jω表述电容、电感元件约束中的时域微分，之后就可以用简单的分压分流概念进行求解了

- 元件相量分析
  - 相量形式的元件约束方程
- 相量域电路定律
- 阻抗串并联
- RC分压相量域分析例
  - 复功率

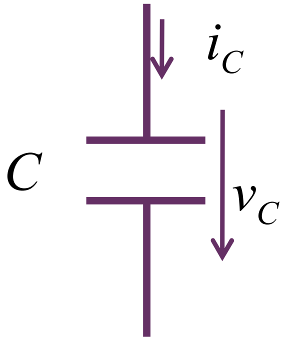
电导、电纳的电压电流相量关系

时域内的微分关系
频域内是比例关系
电容是线性元件



$$i_G = G \cdot v_G$$

$$\dot{I}_G = G \cdot \dot{V}_G$$



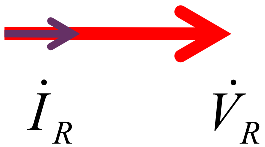
$$i_C = C \cdot \frac{dv_C}{dt}$$

$$\dot{I}_C = j\omega C \cdot \dot{V}_C = jB \cdot \dot{V}_C$$

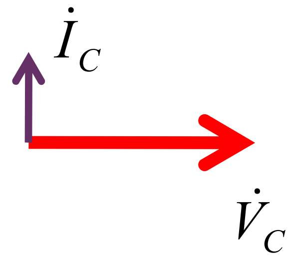
电导：**G**
conductance S

统称为导纳
admittance

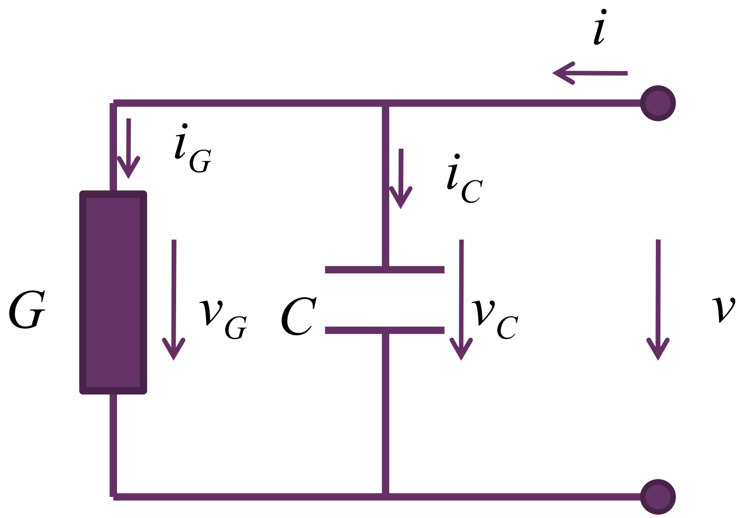
电纳：**B=ωC**
susceptance S

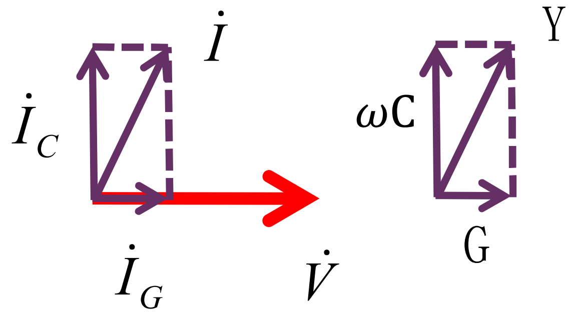


$$\frac{\dot{I}}{\dot{V}} = Y = \operatorname{Re} Y + j \operatorname{Im} Y = G + jB$$



RC并联导纳





$$Y = \frac{\dot{I}}{\dot{V}} = \frac{I_p}{V_p}\angle(\varphi_I - \varphi_V)$$

$$i = i_G + i_C \qquad \dot{I} = \dot{I}_G + \dot{I}_C$$

$$\dot{I} = \dot{I}_G + \dot{I}_C = G\dot{V}_G + j\omega C\dot{V}_C = (G + j\omega C)\dot{V} = Y\dot{V}$$

$$Y = G + j\omega C$$
$$= G + jB$$

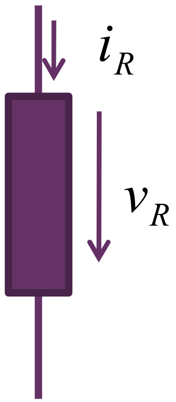
导纳

admittance

$$Y = G + j\omega C = \sqrt{G^2 + (\omega C)^2}\angle\arctan\frac{\omega C}{G}$$

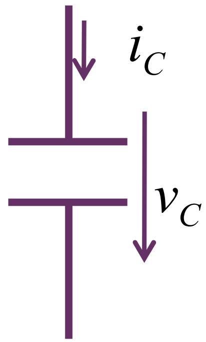
电阻、电抗的电压电流相量关系

时域内的积分关系
频域内是比例关系
电容是线性元件



$$v_R = R \cdot i_R$$

$$\dot{V}_R = R \cdot \dot{I}_R$$



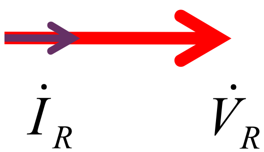
$$v_C = \frac{1}{C}\int i_C dt$$

$$\dot{V}_C = \frac{1}{j\omega C} \cdot \dot{I}_C = jX \cdot \dot{I}_C$$

电阻：**R**
resistance Ω

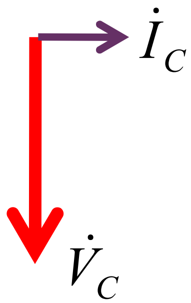
统称为阻抗
impedance

电抗：**X=-(ωC)$^{-1}$**
reactance Ω

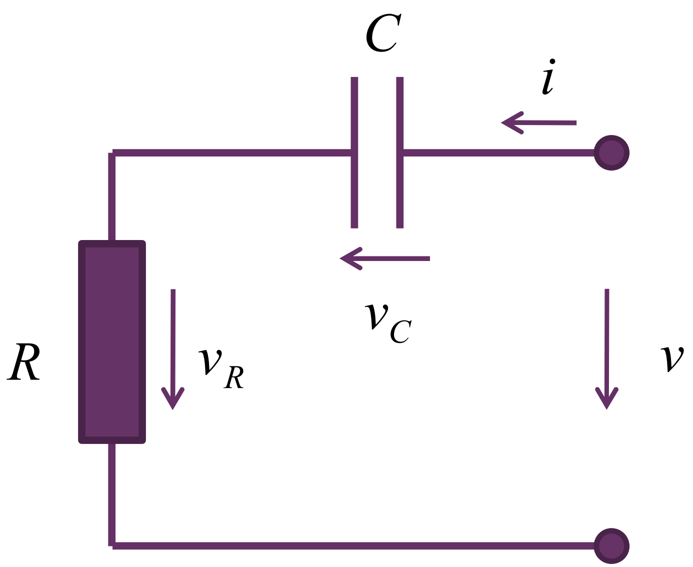


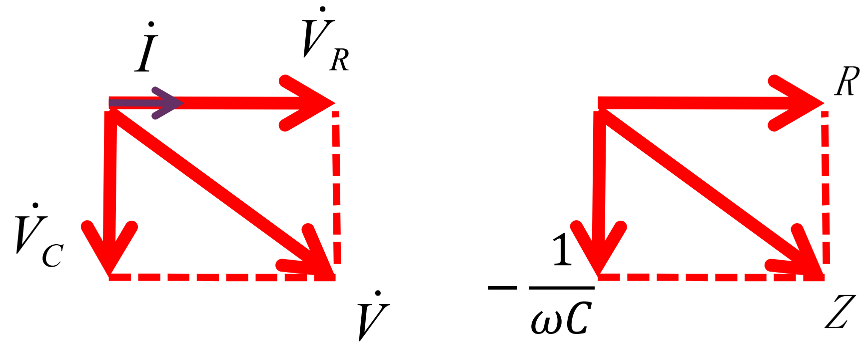
$$\frac{\dot{V}}{\dot{I}} = Z = \mathrm{Re}\,Z + j\,\mathrm{Im}\,Z = R + jX$$

$$Z = \frac{1}{Y}$$



RC串联阻抗





$$v = v_R + v_C \qquad \dot{V} = \dot{V}_R + \dot{V}_C \qquad Z = \frac{\dot{V}}{\dot{I}} = \frac{V_p}{I_p}\angle(\varphi_V - \varphi_I)$$

$$\dot{V} = \dot{V}_R + \dot{V}_C = R\dot{I}_R + \frac{1}{j\omega C}\dot{I}_C = \left(R + \frac{1}{j\omega C}\right)\dot{I} = Z\dot{I}$$

$$Z = R + \frac{1}{j\omega C}$$
$$= R + jX$$

阻抗
impedance

$$Z = R + \frac{1}{j\omega C} = \sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2}\angle - \arctan\frac{1}{\omega RC}$$

电感是电容的对偶元件

$$i_C(t)=C\cdot\frac{dv_C(t)}{dt}$$

$$v_L(t)=L\cdot\frac{di_L(t)}{dt}$$

$$\dot{I}_C=j\omega C\cdot\dot{V}_C=jB\cdot\dot{V}_C$$

$$\dot{V}_L=j\omega L\cdot\dot{I}_L=jX\cdot\dot{I}_L$$

$$\dot{V}_C=\frac{1}{j\omega C}\cdot\dot{I}_C=jX\cdot\dot{I}_C=j\left(-\frac{1}{\omega C}\right)\cdot\dot{I}_C$$

$$\dot{I}_L=\frac{1}{j\omega L}\cdot\dot{V}_L=jB\cdot\dot{V}_L=j\left(-\frac{1}{\omega L}\right)\cdot\dot{V}_L$$

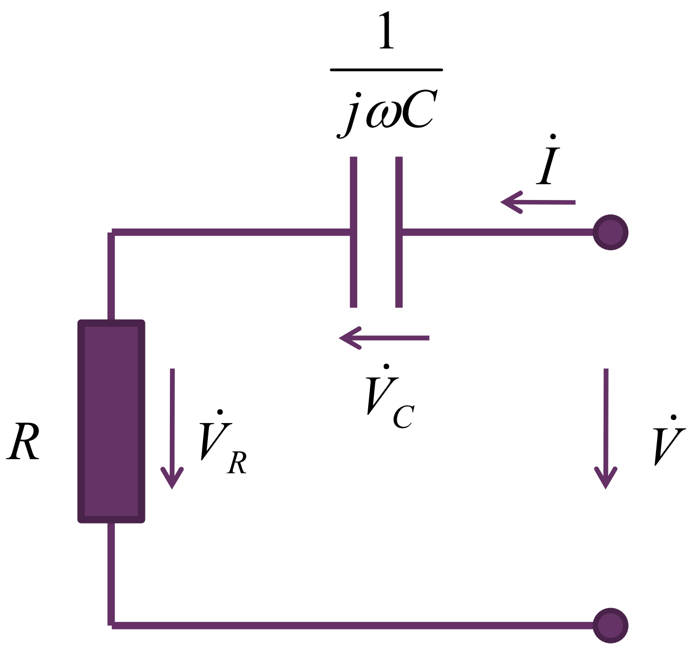
$$B_C=\omega C$$

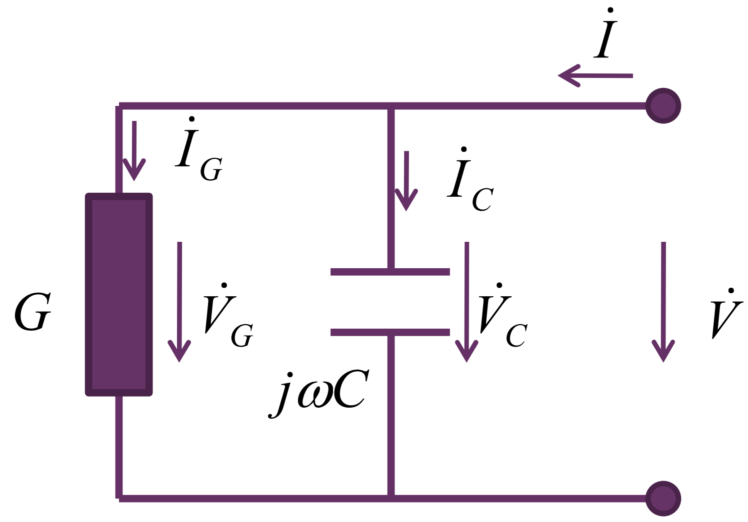
$$X_L=\omega L$$

$$X_C=-\frac{1}{\omega C}$$

$$B_L=-\frac{1}{\omega L}$$

基尔霍夫定律和广义欧姆定律





$$\dot{V} = \dot{V}_R + \dot{V}_C$$

$$\dot{I} = \dot{I}_G + \dot{I}_C$$

$$\dot{V}_R = R\dot{I}$$

$$\dot{V}_C = \frac{1}{j\omega C}\dot{I}$$

$$\dot{I}_G = G\dot{V}$$

$$\dot{I}_C = j\omega C\dot{V}$$

阻抗串并联

相量域，电阻和电抗，电导和电纳具有完全相同的地位

串联

$$\dot{V}=\sum_{k=1}^{N}\dot{V}_k=\sum_{k=1}^{N}Z_k\dot{I}_k=\sum_{k=1}^{N}Z_k\dot{I}=\left(\sum_{k=1}^{N}Z_k\right)\dot{I}=Z\dot{I}$$

$$Z=\sum_{k=1}^{N}Z_k$$

$$R=\sum_{k=1}^{N}R_k$$

$$j\omega L=\sum_{k=1}^{N}j\omega L_k$$

$$\frac{1}{j\omega C}=\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{j\omega C_k}$$

并联

$$\dot{I}=\sum_{k=1}^{N}\dot{I}_k=\sum_{k=1}^{N}Y_k\dot{V}_k=\sum_{k=1}^{N}Y_k\dot{V}=\left(\sum_{k=1}^{N}Y_k\right)\dot{V}=Y\dot{V}$$

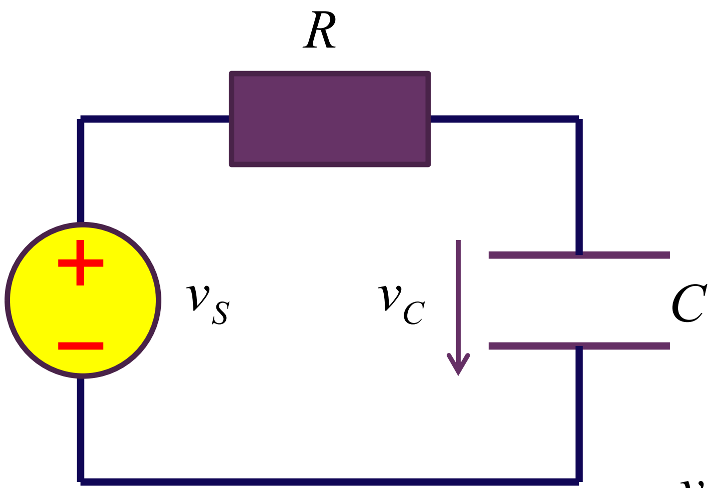
$$Y=\sum_{k=1}^{N}Y_k$$

$$G=\sum_{k=1}^{N}G_k$$

$$j\omega C=\sum_{k=1}^{N}j\omega C_k$$

$$\frac{1}{j\omega L}=\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{j\omega L_k}$$

RC分压的相量法分析



$$\dot{V}_C=\frac{\frac{1}{j\omega C}}{R+\frac{1}{j\omega C}}\dot{V}_S=\frac{1}{1+j\omega RC}\dot{V}_S$$

$$=\frac{1}{\sqrt{1+(\omega RC)^2}e^{j\arctan\omega RC}}\dot{V}_S=\frac{e^{-j\arctan\omega RC}}{\sqrt{1+(\omega RC)^2}}\dot{V}_S$$

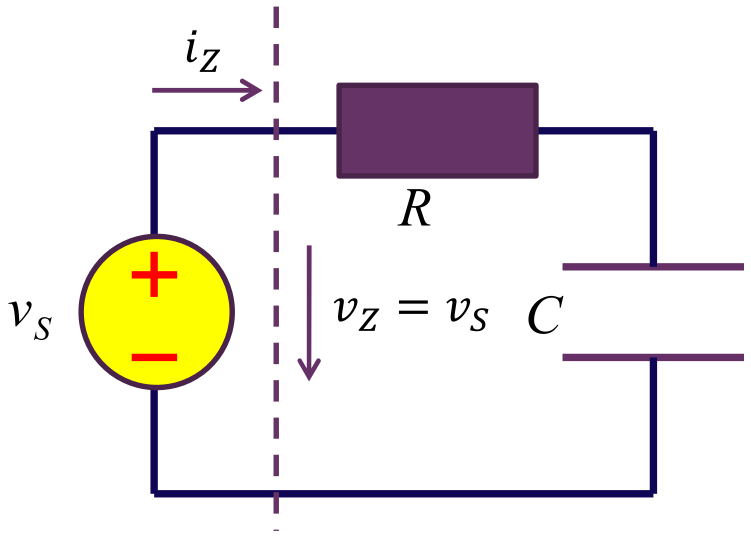
$$v_S(t)=V_{Sp}\cos(\omega t+\varphi_S)$$

$$v_C(t)=\frac{V_{Sp}}{\sqrt{1+(\omega RC)^2}}\cos(\omega t+\varphi_S-\arctan(\omega RC))$$

用相量法实现对**LTI**系统的正弦稳态分析属频域分析方法，和线性电阻电路在时域的分析一样的简单，用分压、分流等简单电路语言就可以解决，区别的仅仅是实数线性代数运算被复数线性代数运算替代而已，相量法分析较一般时域分析方法（如时域积分等方法）而言，分析复杂度大大下降

功率分析

$$Z=R+\frac{1}{j\omega C}=\sqrt{R^2+\left(\frac{1}{\omega C}\right)^2}\,e^{-j\arctan\frac{1}{\omega RC}}$$
$$=|Z|e^{j\varphi_Z}=|Z|\cos\varphi_Z+j|Z|\sin\varphi_Z$$



$$\dot{I}_Z=\frac{\dot{V}_Z}{Z}=\frac{\dot{V}_S}{|Z|e^{j\varphi_Z}}$$

$$i_Z(t)=\frac{V_{Sp}}{|Z|}\cos(\omega t+\varphi_s-\varphi_Z)=\frac{V_{Zp}}{|Z|}\cos(\omega t+\varphi_V-\varphi_Z)$$
$$=I_{Zp}\cos(\omega t+\varphi_I)$$

串联RC端口吸收功率

$$p_Z(t)=v_Z(t)i_Z(t)=V_{Zp}\cos(\omega t+\varphi_V)\cdot I_{Zp}\cos(\omega t+\varphi_I)$$
$$=\frac{1}{2}V_{Zp}I_{Zp}\big(\cos(\varphi_V-\varphi_I)+\cos(2\omega t+\varphi_V+\varphi_I)\big)$$

瞬时功率

$$P_Z=\overline{p_Z(t)}=\boldsymbol{\frac{1}{2}V_{Zp}I_{Zp}\cos(\varphi_V-\varphi_I)}=\frac{1}{2}V_{Zp}I_{Zp}\cos\varphi_Z$$
$$=\frac{1}{2}I_{Zp}|Z|I_{Zp}\cos\varphi_Z=\frac{1}{2}I_{Zp}^2|Z|\cos\varphi_Z=\frac{1}{2}I_{Zp}^2R$$

平均功率

阻抗中的电阻才真正消耗功率，电抗不消耗功率

复功率

$$P_Z=\frac{1}{2}V_{Zp}I_{Zp}\cos(\varphi_V-\varphi_I)$$

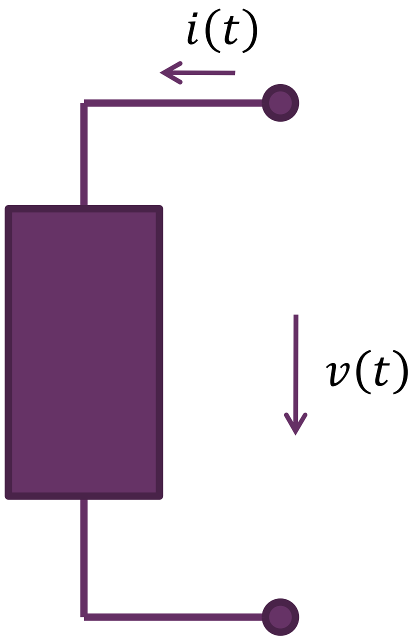
平均功率（**W**，瓦）

$\varphi_V-\varphi_I$　功率因数角

$$S=\frac{1}{2}V_pI_p=V_{rms}I_{rms}$$

视在功率（**VA**，伏安）

- 假设某负载（单端口网络）的端口电压电流为如图所示的关联参考方向，定义该负载所吸收的复功率为



$$\begin{aligned}\hat{S}&=\frac{1}{2}\dot{V}\dot{I}^*\\&=\frac{1}{2}(V_p\angle\varphi_V)(I_p\angle\varphi_I)^*\\&=\frac{1}{2}(V_p\angle\varphi_V)(I_p\angle-\varphi_I)\\&=\frac{1}{2}V_pI_p\angle(\varphi_V-\varphi_I)=S\cdot e^{j(\varphi_V-\varphi_I)}\\&=S\cos(\varphi_V-\varphi_I)+jS\sin(\varphi_V-\varphi_I)\\&=P+jQ\end{aligned}$$

实功，有功功率（**W**，瓦）
平均功率

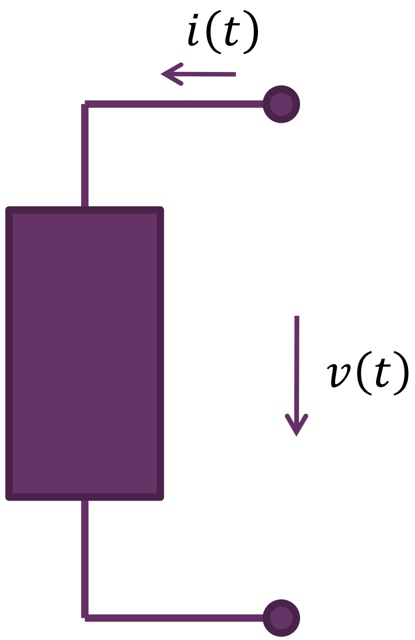
虚功，无功功率（**var**，乏）

阻抗、功率三角形

$$Z=\frac{\dot{V}}{\dot{I}}=\frac{V_p}{I_p}\angle(\varphi_V-\varphi_I)$$

$$=\frac{V_p}{I_p}\cos(\varphi_V-\varphi_I)+j\frac{V_p}{I_p}\sin(\varphi_V-\varphi_I)$$

$$=R+jX$$

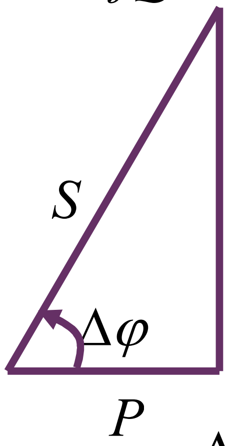


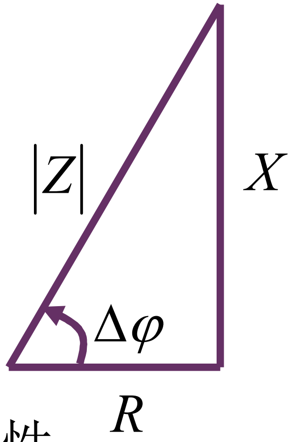
$$\boldsymbol{S}=\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\boldsymbol{V_p I_p}$$

$$\hat{S}=S\angle(\varphi_V-\varphi_I)$$

$$=S\cos(\varphi_V-\varphi_I)+jS\sin(\varphi_V-\varphi_I)$$

$$=P+jQ$$





$P=I_{rms}^2R$ 负载真正消耗的功率

$Q=I_{rms}^2X$ 来回反射的功率
吸收、释放、吸收、…

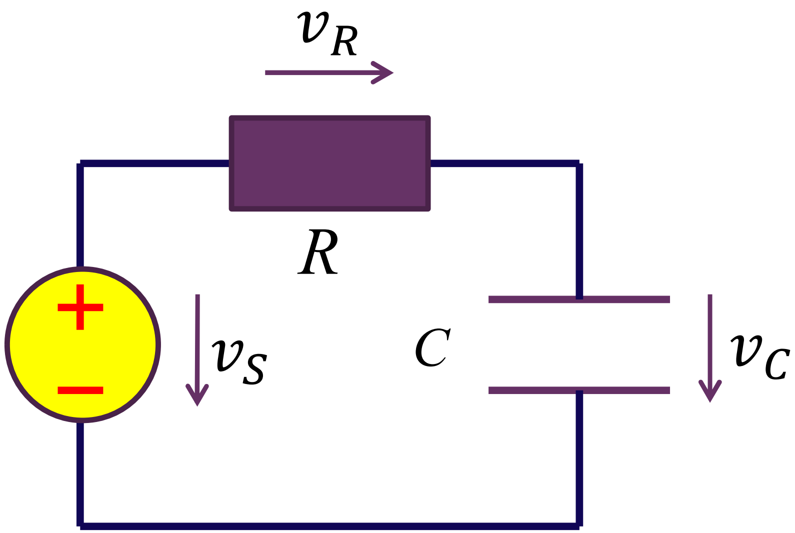
$S=I_{rms}^2|Z|$ 负载看上去消耗的功率

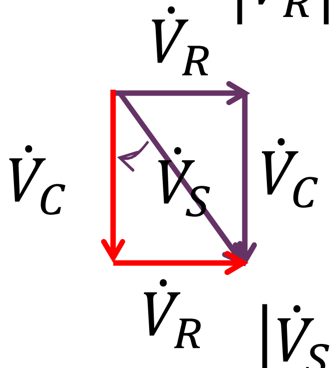
$\Delta\varphi<0$：容性

$\Delta\varphi>0$：感性

例1

- 用频率f_0=1MHz的正弦波电压源$v_S(t) = 10\cos(2\pi f_0 t + \varphi_0)$(V)激励RC串联回路，在600Ω电阻上测得正弦波峰值电压为6V，请分析电容容值为多少，电容电压表达式，以及RC串联回路的复功率情况。





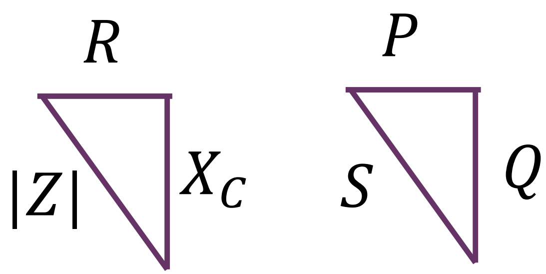
$$\left|\dot{V}_R\right| = 6V$$

$$\left|\dot{V}_C\right| = 8V$$

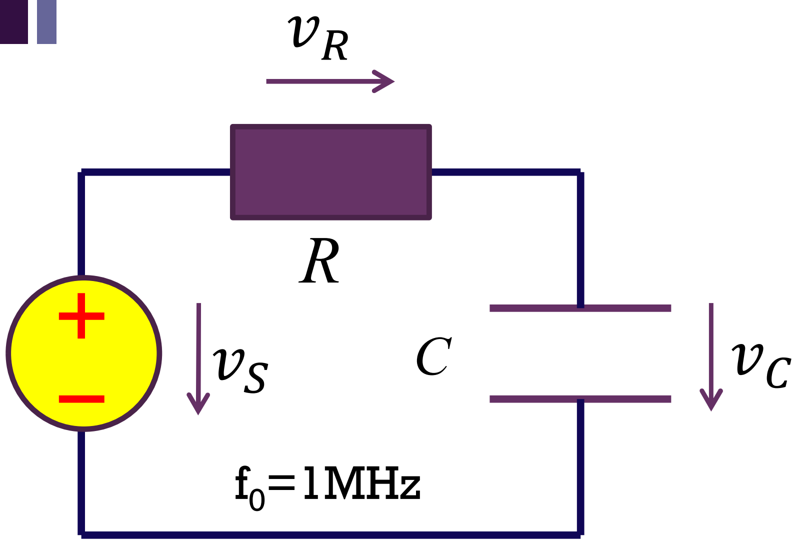
$$\left|\dot{V}_S\right| = 10V$$

$$\Delta\varphi = arctan\frac{3}{4} = 37°$$

$$v_C(t) = 8\cos(2\pi f_0 t + \varphi_0 - 37°)$$



解



$$C = -\frac{1}{\omega_0 X_C} = \frac{1}{2\pi \times 10^6 \times 800} = 199pF$$

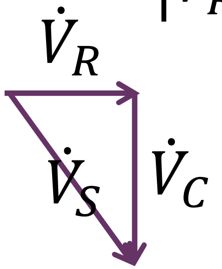
$$P = \frac{\left|\dot{V}_R\right|^2}{2R} = \frac{6^2}{2 \times 600} = 30mW$$

$$Q = -40m\mathbf{var}$$

容性虚功

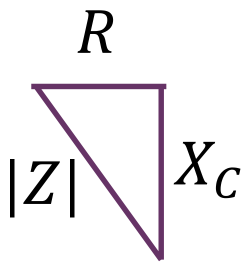
$$R = 600\Omega$$

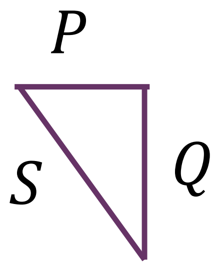
$$\left|\dot{V}_R\right| = 6V$$



$$\left|\dot{V}_C\right| = 8V$$

$$\left|\dot{V}_S\right| = 10V$$

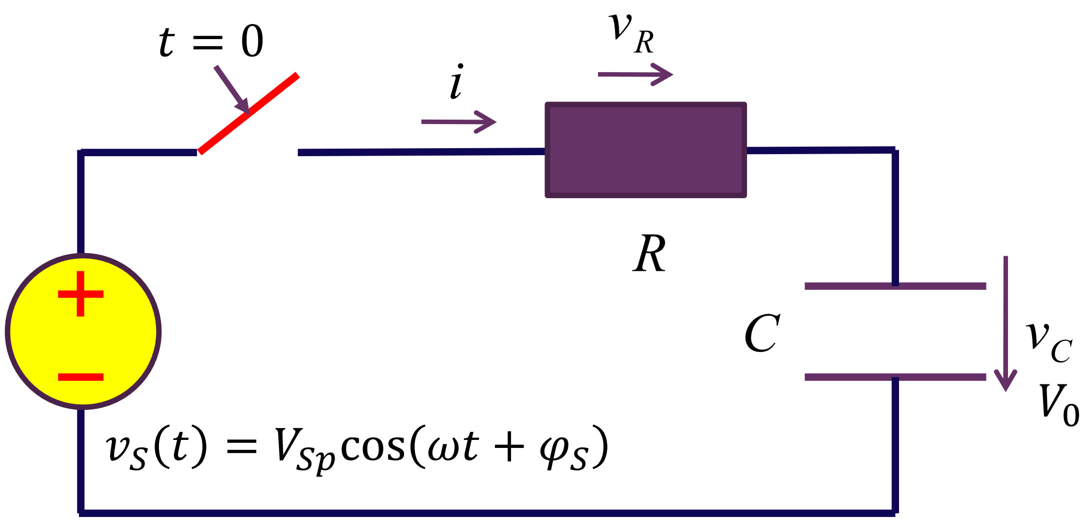




$$X_C = -800\Omega = -\frac{1}{\omega_0 C}$$

$$S = 50mVA$$

3. RC分压： $t=0$时加载正弦激励



$t>0$

$$v_S(t)=v_R(t)+v_C(t)$$

$$=i_R(t)R+v_C(t)$$

$$=i_C(t)R+v_C(t)$$

$$=RC\frac{d}{dt}v_C(t)+v_C(t)$$

$t>0$后的电路方程为

$$RC\frac{d}{dt}v_C(t)+v_C(t)=v_S(t)$$

$$v_S(t)=V_{Sp}\cos(\omega t+\varphi_S)$$

$t=0$时加载激励，存在电容初始电压的源等效问题，即存在指数衰减规律的零输入响应（电容放电曲线）

由于电路中的零输入响应是指数衰减规律的函数，电路中存在着非正弦波信号，因而不能直接假设电容电压为前述稳态分析中假定的正弦波电压

一般理论推导

$$RC\frac{d}{dt}v_C(t)+v_C(t)=v_S(t)$$

$$\frac{d}{dt}v_C(t)+\frac{1}{\tau}v_C(t)=\frac{1}{\tau}v_S(t)$$

$$e^{\frac{t}{\tau}}\frac{d}{dt}v_C(t)+\frac{1}{\tau}e^{\frac{t}{\tau}}v_C(t)=\frac{1}{\tau}e^{\frac{t}{\tau}}v_S(t)$$

$$\frac{d}{dt}\left(e^{\frac{t}{\tau}}v_C(t)\right)=\frac{1}{\tau}e^{\frac{t}{\tau}}v_S(t)$$

$$e^{\frac{t}{\tau}}v_C(t)\Big|_0^t=\int_0^t\frac{1}{\tau}e^{\frac{\lambda}{\tau}}v_S(\lambda)d\lambda$$

$$e^{\frac{t}{\tau}}v_C(t)-v_C(0)=\int_0^t e^{\frac{\lambda}{\tau}}v_S(\lambda)d\frac{\lambda}{\tau}$$

$$v_C(t)=v_C(0)e^{-\frac{t}{\tau}}+e^{-\frac{t}{\tau}}\int_0^t e^{\frac{\lambda}{\tau}}v_S(\lambda)d\frac{\lambda}{\tau}$$

$$v_C(t)=V_0e^{-\frac{t}{\tau}}+\int_0^t e^{\frac{\lambda-t}{\tau}}v_S(\lambda)d\frac{\lambda}{\tau}$$

零输入响应　　零状态响应　　$t>0$

$$\begin{aligned}v_C(t)&=V_0e^{-\frac{t}{\tau}}+\int_{-\infty}^t e^{\frac{\lambda-t}{\tau}}v_S(\lambda)d\frac{\lambda}{\tau}\\&\quad-\int_{-\infty}^0 e^{\frac{\lambda-t}{\tau}}v_S(\lambda)d\frac{\lambda}{\tau}\\&=\left(V_0-\int_{-\infty}^0 e^{\frac{\lambda}{\tau}}v_S(\lambda)d\frac{\lambda}{\tau}\right)e^{-\frac{t}{\tau}}+v_{C\infty}(t)\\&=\left(V_0-v_{C\infty}(0)\right)e^{-\frac{t}{\tau}}+v_{C\infty}(t)\end{aligned}$$

瞬态响应　　稳态响应　　$t>0$

三要素法

$$\tau\frac{d}{dt}x(t)+x(t)=s(t)$$

$$x(t)=X_0e^{-\frac{t}{\tau}}+\int_0^t e^{\frac{\lambda-t}{\tau}}s(\lambda)d\frac{\lambda}{\tau}=(X_0-X_{\infty 0})e^{-\frac{t}{\tau}}+x_\infty(t) \qquad t>0$$

零输入响应　零状态响应　瞬态响应　稳态响应

要素1：时间常数τ　$\tau=RC$　$\tau=GL$

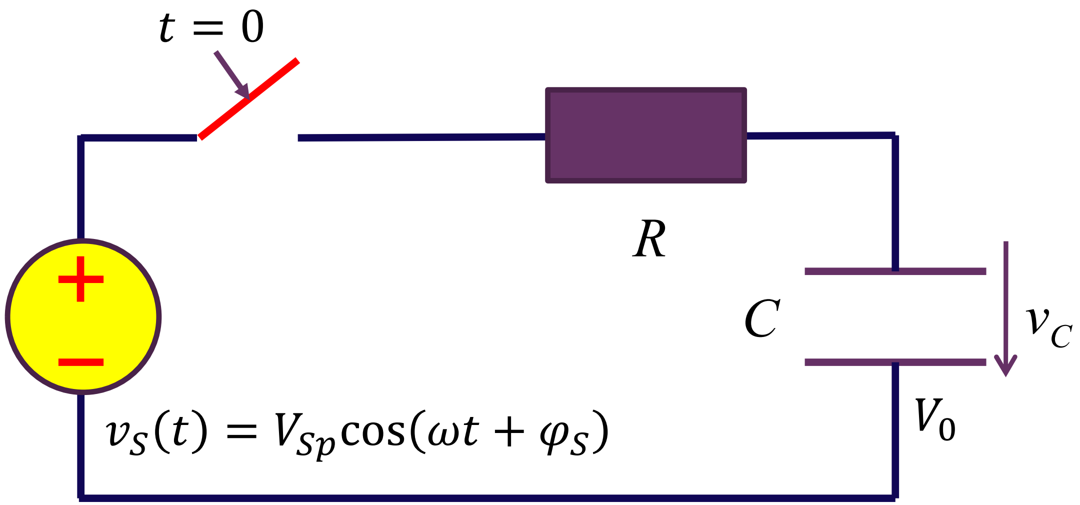
要素2：初值$\mathbf{x_0}$　$v_C(0)=V_0$　$i_L(0)=I_0$

要素3：终值，稳态响应$\mathbf{x_\infty(t)}$

$$\boldsymbol{x_\infty(t)=\left(\int_{-\infty}^t e^{\frac{\lambda-t}{\tau}}s(\lambda)d\frac{\lambda}{\tau}\right)\cdot U(t)}$$

- 稳态响应如何求
  - （1）直流激励：电容开路，电感短路可获得直流激励下的稳态解
  - （2）正弦波激励：相量法（电容C用jωC导纳替代，电感L用jωL阻抗替代）可获得正弦激励下的稳态解
  - （3）方波激励：下周讲
  - （4）其他激励：电路意义难以解释，代入求解，如果求不出就猜：稳态响应形式应当和激励形态相类似，猜后代入原始方程验证确认

RC分压： $t=0$时加载正弦激励



$$v_C(t)=v_{C\infty}(t)+(V_{C0}-V_{C\infty0})e^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$\tau=RC$$

$$V_{C0}=V_0$$

由相量法求得稳态响应为

$$v_{C\infty}(t)=\frac{V_{Sp}}{\sqrt{1+(\omega\tau)^2}}\cos(\omega t+\varphi_S-\arctan(\omega\tau))$$

$$v_C(t)=\frac{V_{Sp}}{\sqrt{1+(\omega\tau)^2}}\cos(\omega t+\varphi_S-\arctan(\omega\tau))$$
$$+\left(V_0-\frac{V_{Sp}}{\sqrt{1+(\omega\tau)^2}}\cos(\varphi_S-\arctan(\omega\tau))\right)e^{-\frac{t}{\tau}}\qquad (t\geq 0)$$

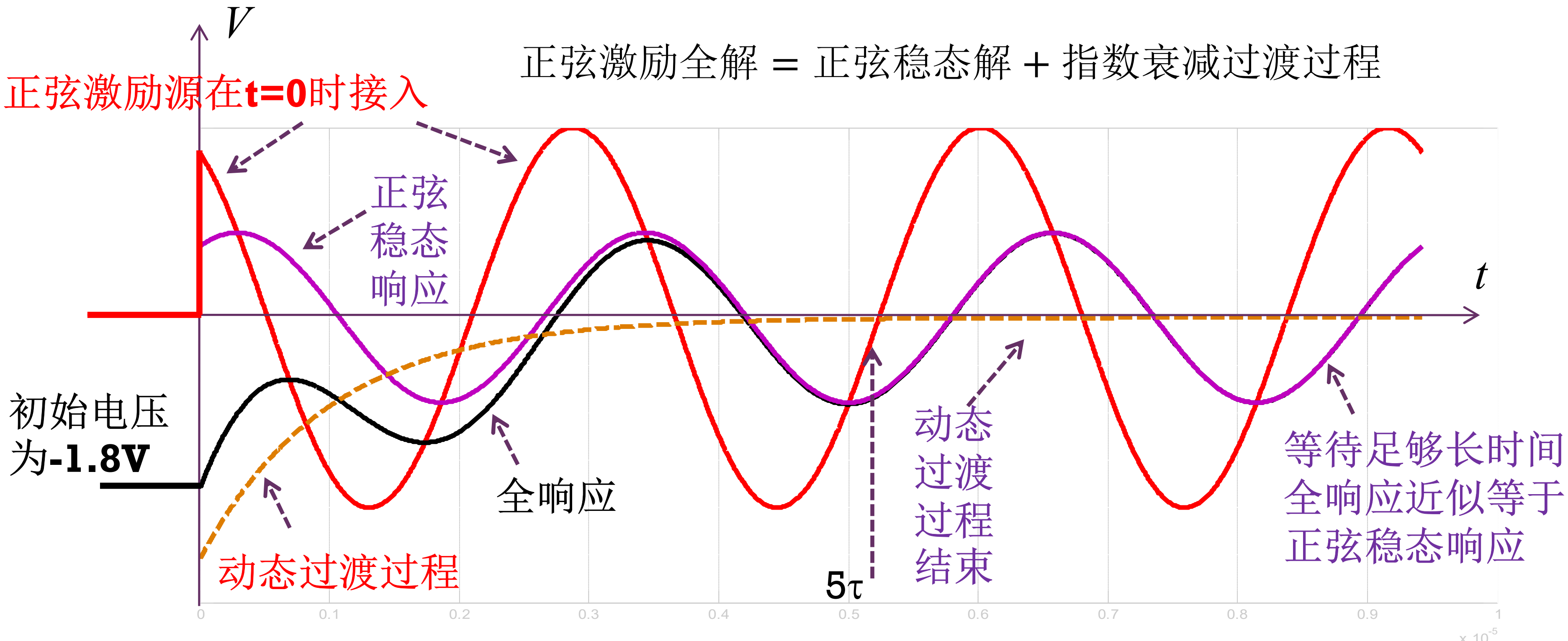
$R = 1k\Omega$ $\quad C = 1nF$ $\quad \tau = RC = 1\mu s$ $\quad V_{C0}(0^+) = V_{C0}(0^-) = -1.8V$

$v_S(t) = 2\cos(\omega t + \varphi_0)$ $\quad \omega = 2\times10^6 rad/s$ $\quad \varphi_0 = \pi/6$

$$\omega\tau = 2$$

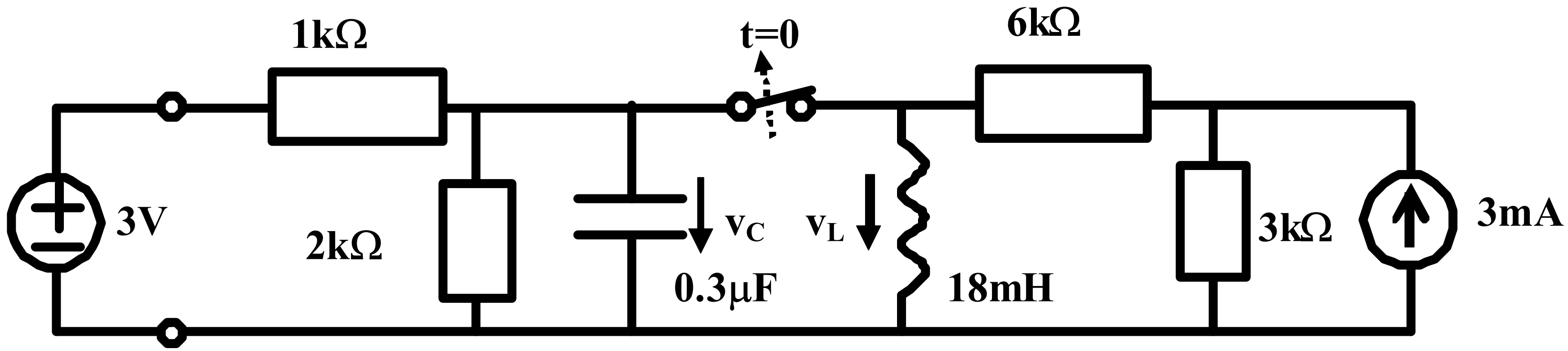
$v_{C\infty}(t) = 0.8944\cos(\omega t + \varphi_0 - \psi)$ $\quad \psi = \arctan(\omega\tau) = 1.1071(rad)$

$$v_{C\infty}(0) = 0.8944\cos(\varphi_0 - \psi) = 0.7464$$

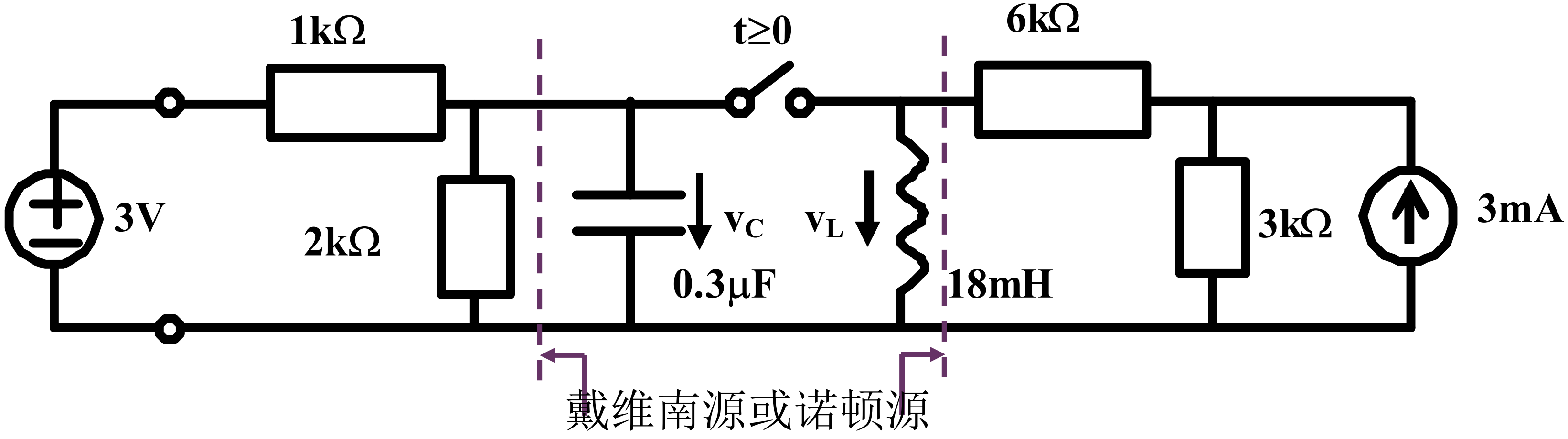


例2

- 开关在t=0时刻断开。断开前，电路已稳定。求开关断开后，电容电压$v_C(t)$和电感电压$v_L(t)$的变化规律



分析：开关断开，则为两个一阶动态



$$\text{输出}=\text{稳态响应}+\left(\text{状态初值}-\text{稳态初值}\right)\cdot\text{指数衰减动态变化}$$

$$v_C(t)=v_{C\infty}(t)+\left(v_C(0)-v_{C\infty}(0)\right)e^{-\frac{t}{\tau_C}} \qquad (t>0)$$

$$i_L(t)=i_{L\infty}(t)+\left(i_L(0)-i_{L\infty}(0)\right)e^{-\frac{t}{\tau_L}}$$

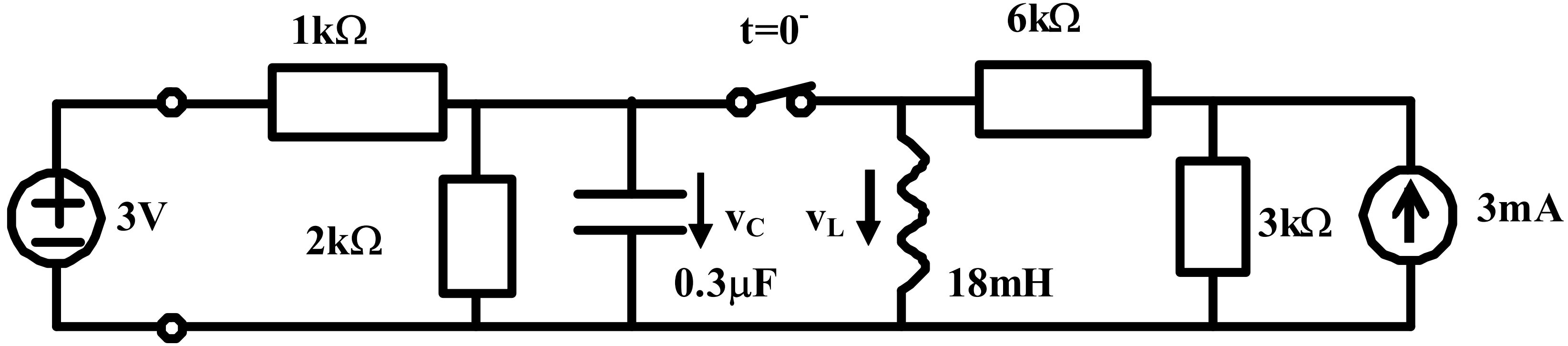
$$v_L(t)=v_{L\infty}(t)+\left(v_L(0^+)-v_{L\infty}(0^+)\right)e^{-\frac{t}{\tau_L}}$$

电感电压不是状态变量，但仍可用三要素法

以状态变量为考察变量

但注意电感电压可突变，因而初值为**0⁺**时刻初值

要素1：初值

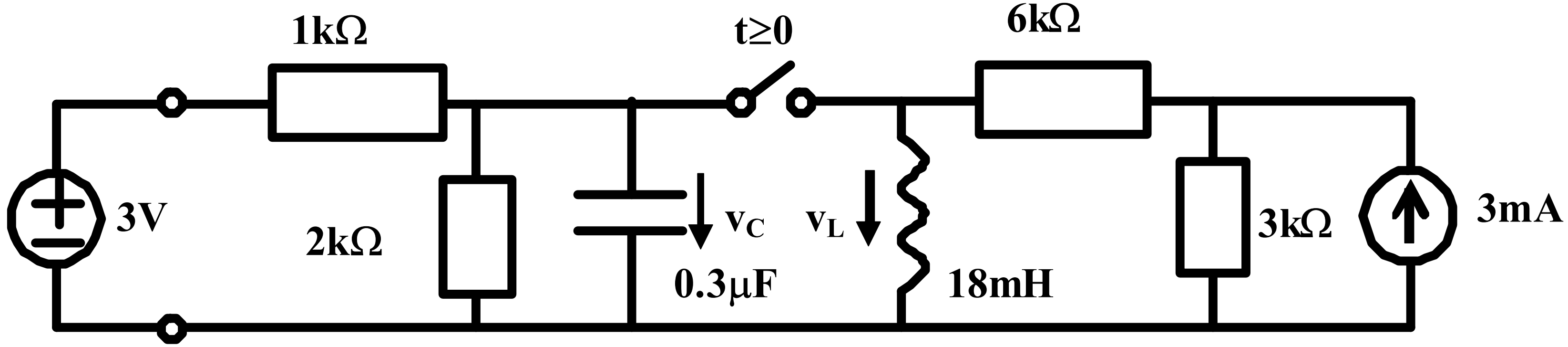


开关断开前是直流电路，
对直流而言，电容开路，
电感短路

$$v_C(0^+) = v_C(0^-) = 0$$

$$i_L(0^+) = i_L(0^-) = \frac{3}{1k} + 3mA\frac{3k}{3k+6k} = 4mA$$

要素2：稳态响应

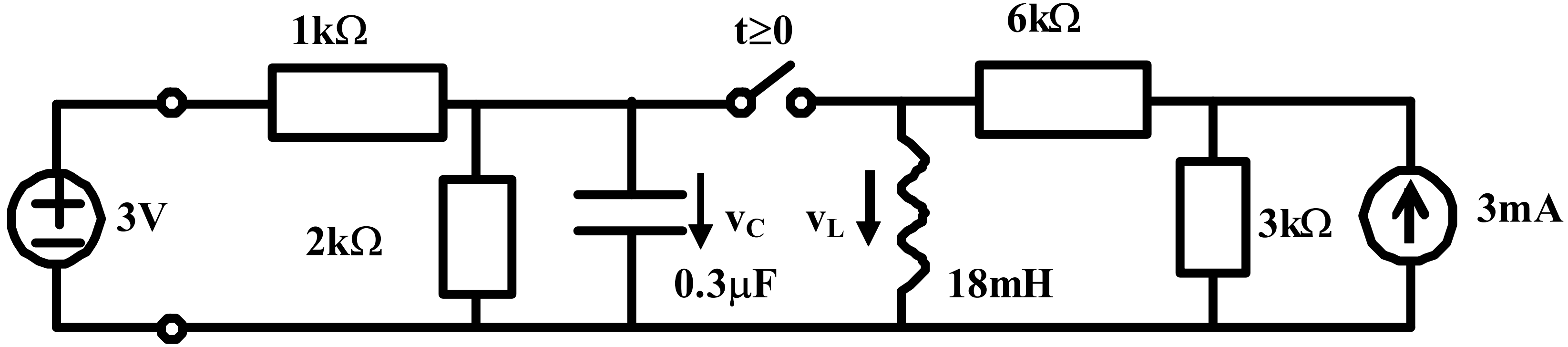


开关打开，等待足够长时间，
再次变化为直流电路，对直流
而言：电容开路，电感短路

$$v_{C\infty}(t)=\frac{2k}{2k+1k}3=2V$$

$$i_{L\infty}(t)=3mA\frac{3k}{3k+6k}=1mA$$

要素3：时间常数



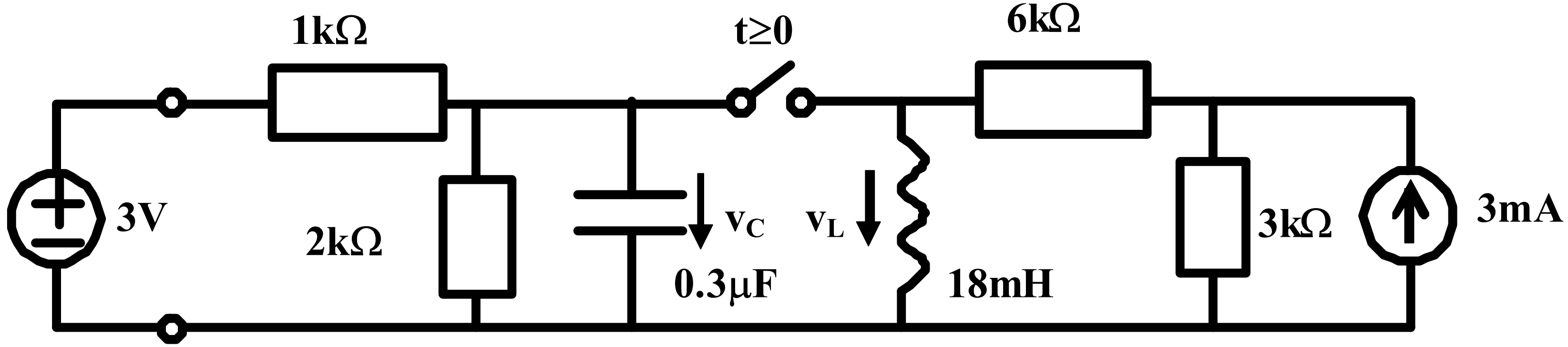
R为戴维南等效内阻

$$\tau_C = RC$$
$$= \frac{1k \cdot 2k}{1k + 2k} \times 0.3\mu$$
$$= 0.2ms$$

G为诺顿等效内导

$$\tau_L = GL$$
$$= \left(\frac{1}{6k+3k}\right) \times 18m$$
$$= 2\mu s$$

三要素结论



$$v_C(t)=v_{C\infty}(t)+\left(v_C(0)-v_{C\infty}(0)\right)e^{-\frac{t}{\tau_C}}$$

$$=2+(0-2)e^{-\frac{t}{0.2m}}$$

$$=2\left(1-e^{-\frac{t}{0.2\times10^{-3}}}\right)\quad V\qquad (t\geq 0)$$

$$i_L(t)=i_{L\infty}(t)+\left(i_L(0)-i_{L\infty}(0)\right)e^{-\frac{t}{\tau_L}}$$

$$=1m+(4m-1m)e^{-\frac{t}{2\mu}}$$

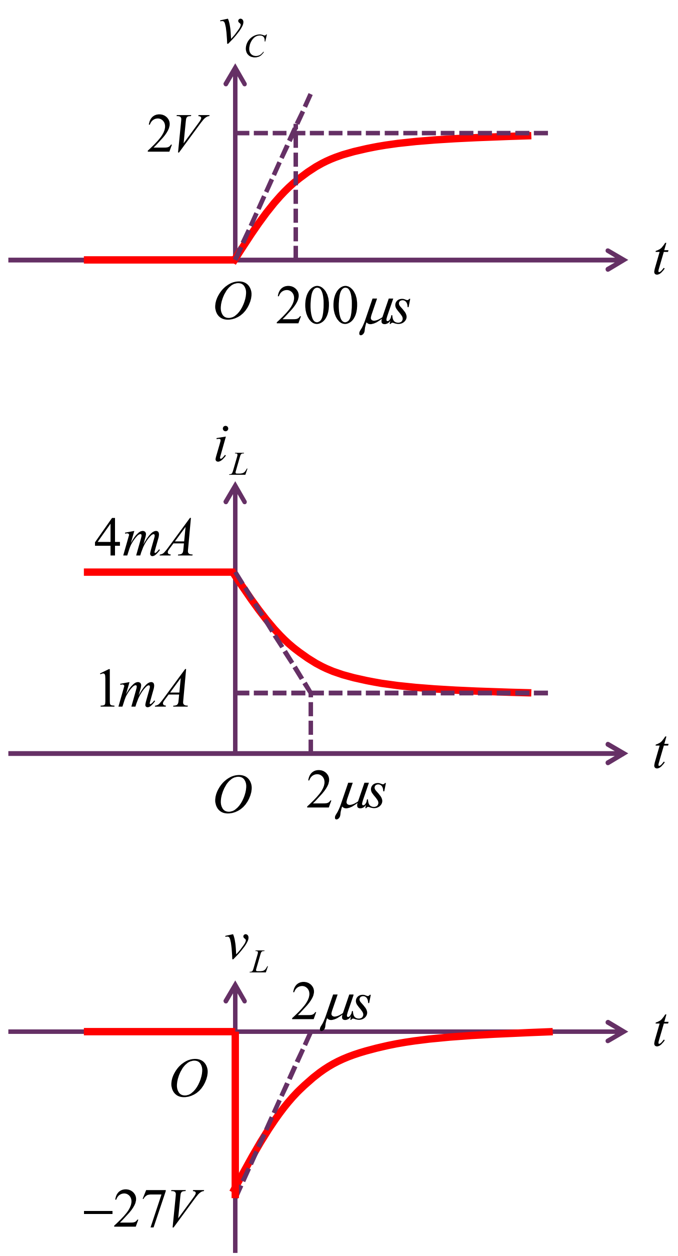
$$=\left(1+3e^{-\frac{t}{2\times10^{-6}}}\right)\quad mA\qquad (t\geq 0)$$

电容电压和电感电流

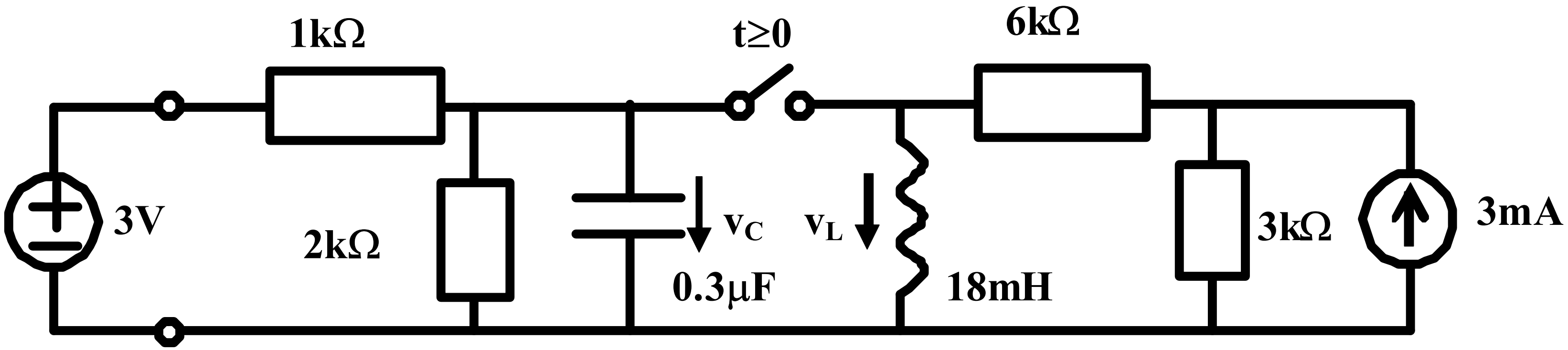
$$v_C(t)=\begin{cases}0 & t<0\\ 2\left(1-e^{-\frac{t}{0.2\times10^{-3}}}\right)\ V & t\ge 0\end{cases}$$

$$i_L(t)=\begin{cases}4mA & t<0\\ \left(1+3e^{-\frac{t}{2\times10^{-6}}}\right)\ mA & t\ge 0\end{cases}$$

$$v_L(t)=L\frac{di_L(t)}{dt}=\begin{cases}0 & t<0\\ -27e^{-\frac{t}{2\times10^{-6}}}\ V & t\ge 0\end{cases}$$



电感电压三要素表述



$$v_L(0^-)=0$$

$$v_L(t)=v_{L\infty}(t)+\left(v_L(0^+)-v_{L\infty}(0^+)\right)e^{-\frac{t}{\tau_L}}$$

$$(t\geq 0)$$

$$v_L(0^+)=-1m\times 3k-4m\times 6k=-27V$$

电感电压非状态变量，可以发生突变

$$v_L(t)=\begin{cases}0 & t<0\\ -27e^{-\frac{t}{2\times 10^{-6}}}\quad V & t\geq 0\end{cases}$$

$$v_{L\infty}(t)=0$$

$$\tau_L=GL=2\mu s$$

本节小结

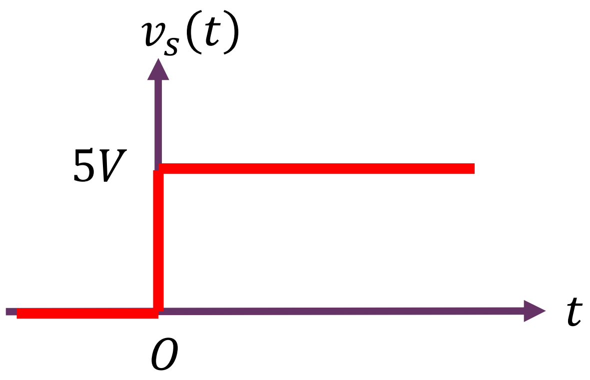
- 对于LTI系统，正弦激励下的稳态响应可以采用相量法
  - 由于LTI元件不会产生新的频率分量，因此单频激励下的稳态响应只能是同频正弦波信号，只需确定该正弦波的幅度和相位即可，而相量就是正弦波的幅度相位复数表述形态
  - 相量域分析时，电容C用jωC导纳替代，电感L用jωL阻抗替代，剩下的分析和线性电阻电路没有任何区别，唯一的区别就是复数运算替代了实数运算而已

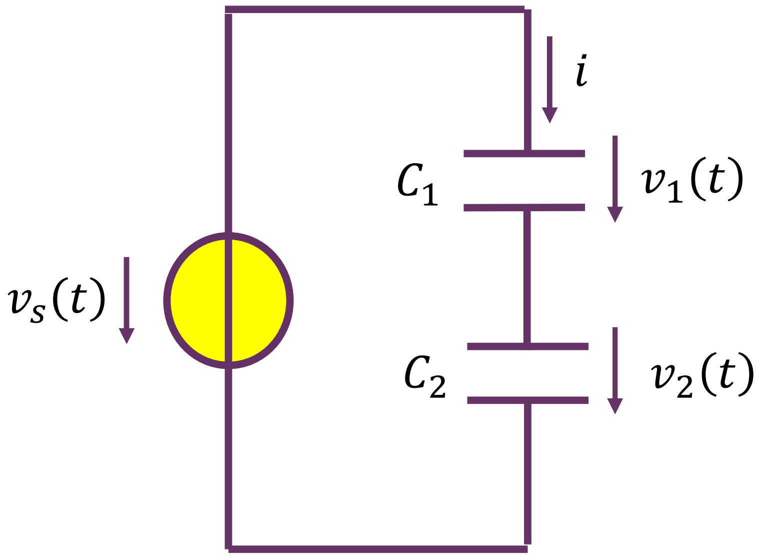
- 一阶LTI系统的分析可以用三要素法
  - 初值
  - 时间常数τ=RC,GL
  - 稳态响应
    - 直流激励：电容开路，电感短路求稳态响应
    - 正弦激励：用相量法求稳态响应

$$\boldsymbol{x(t)=x_\infty(t)+\left(x(0^+)-x_\infty(0^+)\right)e^{-\frac{t}{\tau}}}$$

习题讲解
作业3.2 电容分压分析

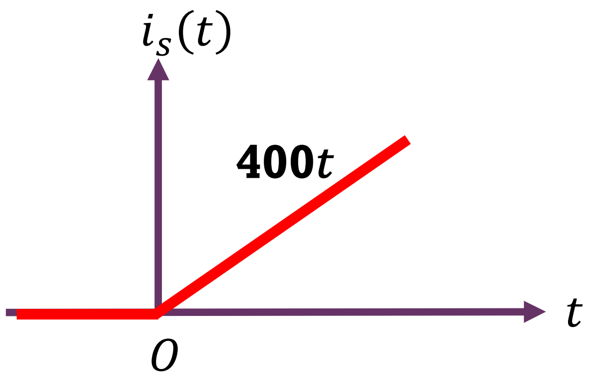
- 图中电路中两个电容的初始电压为0V，$V_s(t)$ = 5U(t) V为一个阶跃恒压源，已知电流$i(t)$= 4$\delta(t)$μA，电容C_2上的电压$v_2(t)$ = 1U(t) V。 求：
  - （1）C_1和C_2各是多少?
  - （2）电路稳定后，两个电容上存储的总能量为多少?
  - （3）恒压源提供的电能是否全部被电容所吸收并存储?

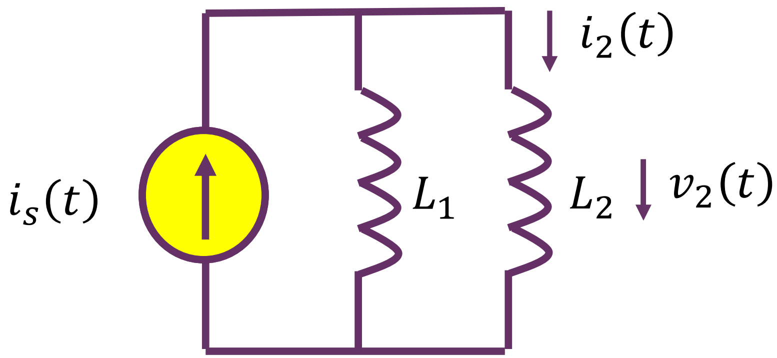




作业3.3 电感分流分析

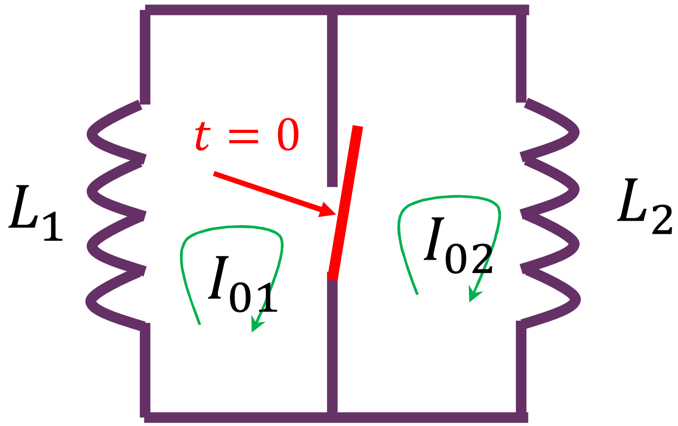
- 图中电路，$i_s(t)$是一个斜升电流源，如图所示， $i_s(t) = 400t\mathrm{U}(t)$ A。电感L_2电流$i_2(t) = 100t\mathrm{U}(t)$ A和电压$v_2(t) = 0.3\mathrm{U}(t)$ V，假设两个电感初始电流均为0。 求：L_1和L_2各是多少。





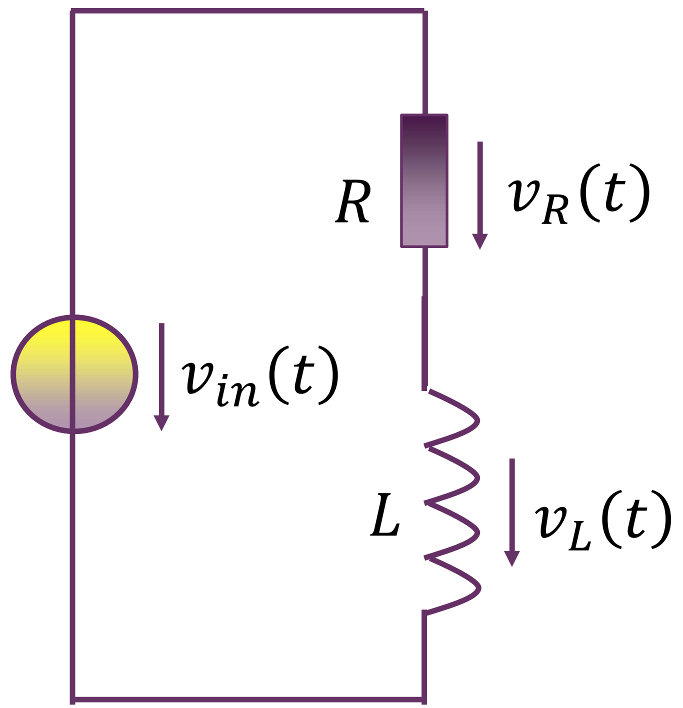
作业3.4 具有初始电流的电感串联

- 如图所示，t<0时，开关闭合，电感L_1和电感L_2分别具有如图所示的初始电流I_{01}和I_{02}。t=0瞬间开关断开，求开关断开后，电感回路中的电流（串联电感电流）大小，并说明开关断开前后电感中的储能是否有变化
  - 作业4.3 用等效电路法一步求出能量丢失



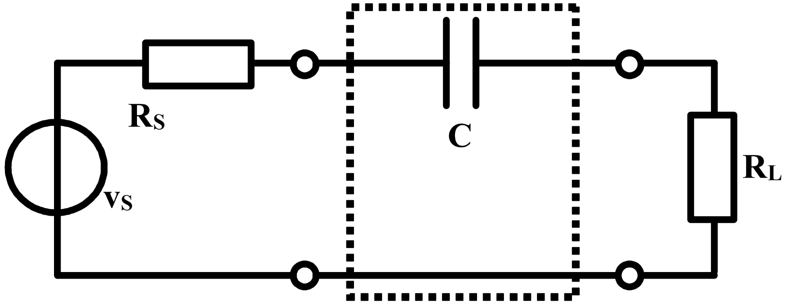
本讲作业
作业1 电阻和电感分压存在90°相差

- 输入正弦波激励电压源，测得电阻上正弦波电压幅度为3V，电感上正弦波电压幅度为4V
  - （1）问：激励电压源正弦波电压幅度为多少?
  - （2）假设输入电压源的初始相位为0，即$\dot{\boldsymbol{V}}_{in} = \boldsymbol{V}_{ip}\angle\boldsymbol{0}°$，请画出激励电压、电阻电压和电感电压相量图（矢量图）
  - （3）假设电阻阻值为1kΩ，分别求出电阻、电感上的瞬时功率、平均功率和复功率，和电源输出的瞬时、平均、复功率相比，功率（能量）是否守恒?
  - （4）保持正弦激励电压源幅度不变，频率变为原来的两倍，此时电阻电压和电感电压幅度分别变化为多少?



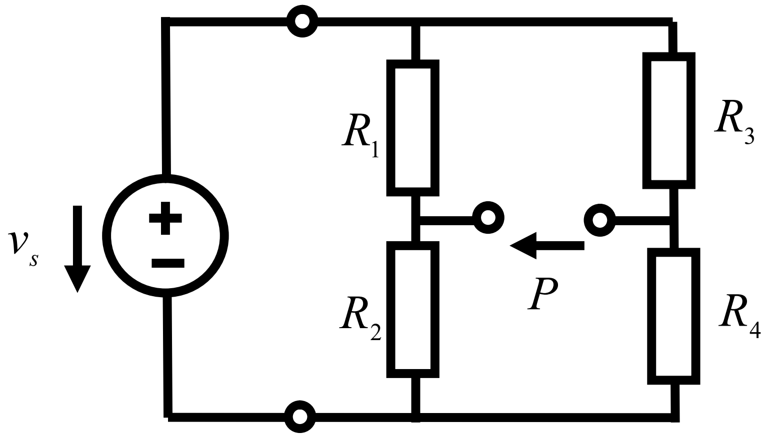
作业2 耦合电容

- 如图所示，这是一个用耦合电容耦合激励源和负载的简单电路模型。请分析确认：什么频率下可认为耦合电容是高频短路的？什么频率下可认为耦合电容是直流开路的？
  - 分析思路：
    - 先分析电容分别短路/开路时，输出电压为多少
    - 再分析存在电容时，输出电压为多少
    - 两者差别低于某个人为规定数值（如1%），则可认为电容短路或开路



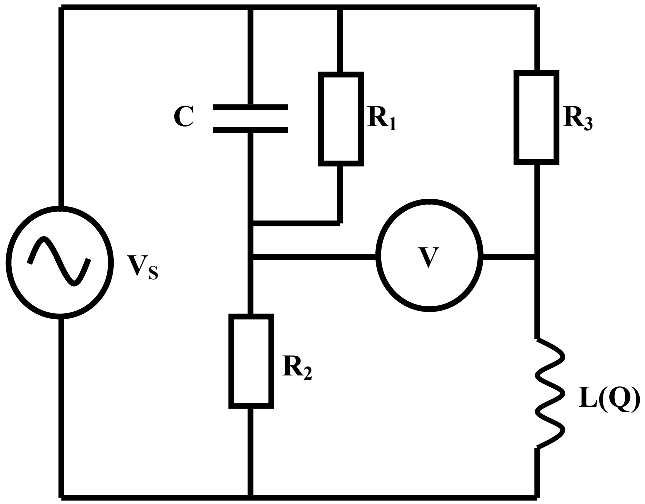
作业3 电桥电路的戴维南等效

- 如图所示为电阻电桥电路（惠斯通电桥），在电桥两端加载恒压，求桥中端口P的戴维南等效电路
  - 已知当电桥是平衡电桥时，端口P的等效戴维南源电压等于0，请由此定义给出电桥的平衡条件是什么？
  - 平衡电桥应用：假设R_1，R_2，R_3电阻已知，且R_3是可调电阻，R_4电阻未知待测，在端口P接电压表（电压表等效电阻为无穷大，视为开路，因而电压表测量的是端口P的开路电压，即等效戴维南源的源电压；也可接电流表，电流表等效电阻为0，视为短路，因而电流表测量的是端口P的短路电流，即等效诺顿源的源电流），调整电阻R_3，直至电表读数为0，此时电桥是平衡的，读出此时的R_3阻值，请问待测电阻R_4等于多少？



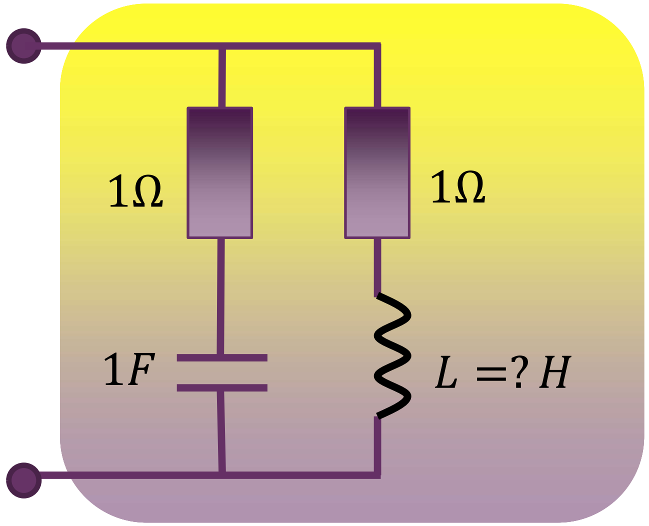
作业4 电桥电路测电感

- 电桥的平衡条件不仅可以用来测量电阻，还可用来测量电容或电感。如图所示为测量电感的麦克斯韦电桥，已知激励源为正弦波电压源，其频率为$\boldsymbol{\omega_0}$。实际电感存在寄生电阻效应，可等效为电感L和寄生电阻R_S的串联，定义电感的品质因数为$\boldsymbol{Q}=\frac{\boldsymbol{\omega_0 L}}{\boldsymbol{R_S}}=\frac{虚功}{实功}$，图中L(Q)代表电感非理想，存在等效串联电阻$\boldsymbol{R_S}=\frac{\boldsymbol{\omega_0 L}}{\boldsymbol{Q}}$。图中其他电阻/电容值均已知可调，调至电桥平衡（桥中电表读数为0）时，请用此时的电阻、电容值表述电感的感值L和品质因数Q。

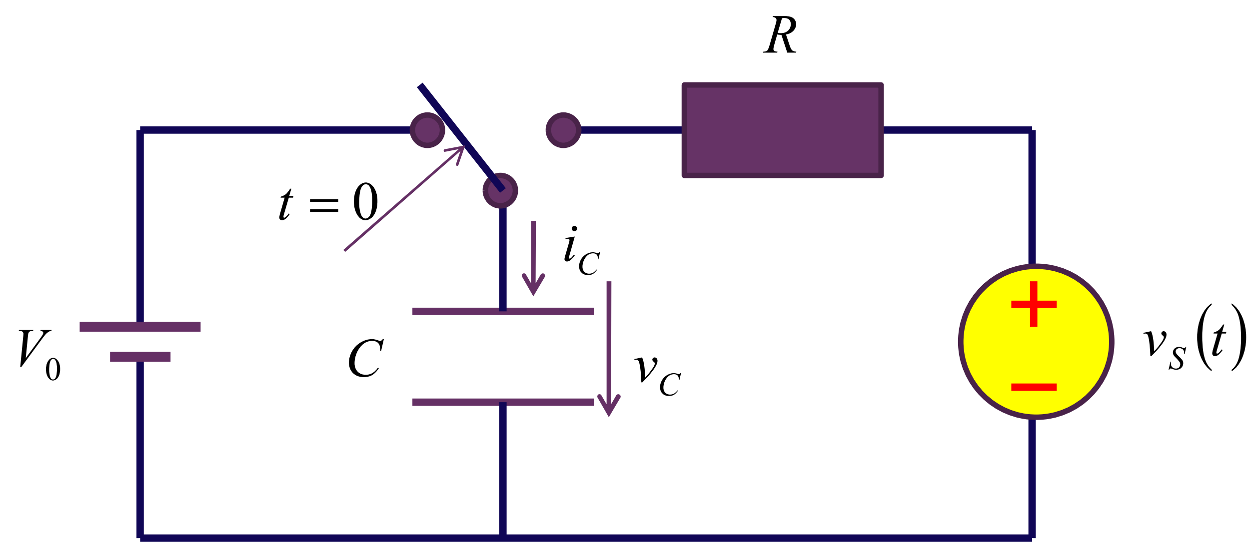


作业5 电感和电容的阻抗具有抵消补偿作用

- 对于图示网络
  - （1）说明通过选择适当的电感感值L，端口阻抗可以和频率ω无关
  - （2）L取该值时，端口阻抗为多少Ω?



作业6 稳态响应



$$v_S(t) = \frac{V_{S0}}{\tau_S} t$$

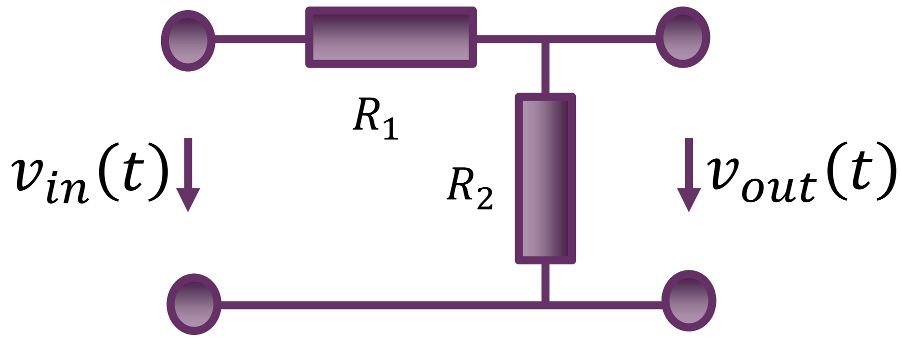
假设激励源是一个斜升信号，请用三要素法给出电容电压表达式。

思路1：代入稳态响应表达式
思路2：首先分解为零输入和零状态，零状态情况下首先求出阶跃激励下的解，积分获得斜升激励下的解
思路3：猜，假设稳态响应具有某种形态，代入方程，定参

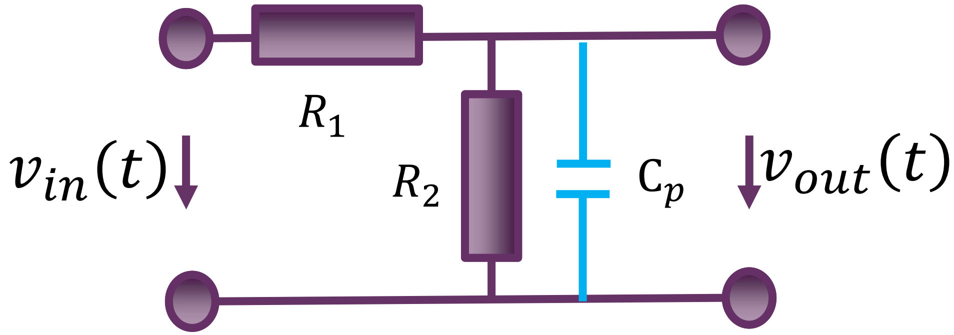
作业7 补偿电容

- 图示电路为一个电压分压网络做衰减器的应用，由于系统存在寄生电容，导致信号通过该衰减网络后出现波形失真，可以通过添加补偿电容将寄生电容影响抵消，使得信号通过该网络后无波形失真，请分析补偿电容大小
  - 提示1：假设输入为阶跃电压，用三要素法，如果瞬态响应为0，则无失真
  - 提示2：在相量域分析，vout是vin的分压，如果分压系数是常数，则无失真

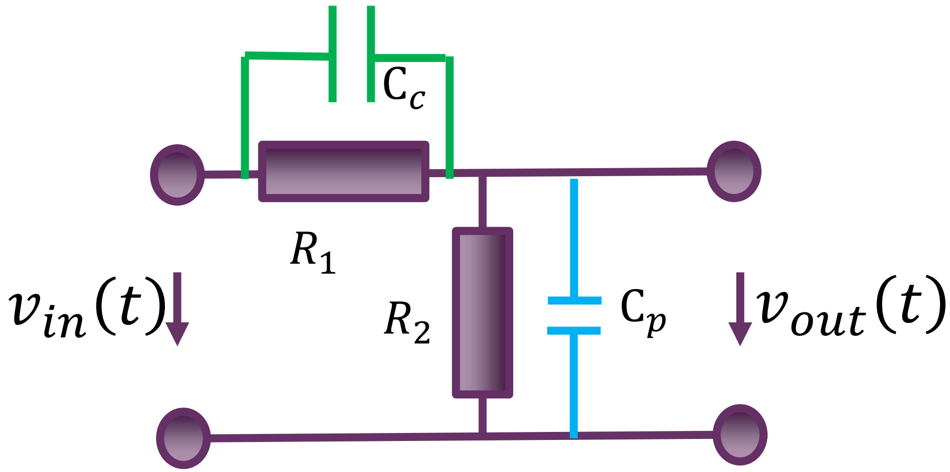
人为设计的电阻衰减器



寄生电容效应导致信号失真



添加补偿电容消除影响



本节课内容在教材中的章节对应

- P619-626: 频域分析：相量法分析
- P628-632: 复功率
- P662-674: 总响应=零输入响应+零状态响应=稳态响应+瞬态响应（三要素法）

- 课本是按电阻电路+动态电路次序做内容安排，现在按线性电路+非线性电路讲，存在内容穿插、倒序等问题，如果有因为课堂未讲看教材看不明白的可以跳过，但课堂上讲过的，尽量通过阅读教材复习，深度理解
- 本周作业较多，不再布置CAD作业，建议同学做作业感觉不肯定的，可以用CAD工具快速验证自己的结论是否正确