

# 概率论与数理统计

任课教师: 胡家信

清华大学数学科学系

2021 年 11 月 8 日



# 复习

- 随机变量 $X$ 的拉氏变换

$$E(e^{-\lambda X}), \quad \lambda > 0.$$

- 随机变量 $X$ 的矩母函数（见下面）

$$E(e^{\lambda X}), \quad -\infty < \lambda < \infty.$$

- 随机变量 $X$ 的特征函数

$$E(e^{i\lambda X}), \quad -\infty < \lambda < \infty.$$

以上都是随机变量 $X$ 变换后的期望，即分别是 $e^{-\lambda X}$ 、 $e^{\lambda X}$ 、 $e^{i\lambda X}$ 的期望，他们均是变量 $\lambda$ 的函数。实际中使用哪个，要看上面积分或级数是否存在。

# 复习

## Bernoulli分布:

- 概率质量函数（或概率分布）:

$$\mathbb{P}(X = 1) = p, \quad \mathbb{P}(X = 0) = 1 - p.$$

- 期望和方差:

$$\mathbb{E}(X) = p, \quad \sigma^2(X) = \text{Var}(X) = pq \quad (q = 1 - p).$$

- 生成函数:

$$g(z) = q + pz.$$

# 复习

二项式分布: 固定正整数 $n$ 和 $p \in [0, 1]$ .

- 概率质量函数 (或概率分布):

$$\mathbb{P}(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, \quad k = 0, 1, \dots, n.$$

- 期望和方差:

$$\mathbb{E}(X) = np, \sigma^2(X) = npq.$$

- 生成函数:

$$g(z) = (q + pz)^n.$$

# 复习

Poisson分布: 固定 $\alpha > 0$ .

- 概率质量函数（或概率分布）:

$$\mathbb{P}(X = k) = \frac{e^{-\alpha}}{k!} \alpha^k, \quad k = 0, 1, \dots$$

- 期望和方差:

$$\mathbb{E}(X) = \sigma^2(X) = \alpha.$$

- 生成函数:

$$g(z) = e^{\alpha(z-1)}.$$

# 复习

## Poisson 极限定律:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \binom{n}{k} \left(\frac{\alpha}{n}\right)^k \left(1 - \frac{\alpha}{n}\right)^{n-k} = \frac{\alpha^k}{k!} e^{-\alpha}.$$

证明思想: 令  $b_k(n) := \binom{n}{k} \left(\frac{\alpha}{n}\right)^k \left(1 - \frac{\alpha}{n}\right)^{n-k}$ 。

- 先证明  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_0(n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{\alpha}{n}\right)^n = e^{-\alpha}$ 。
- 再证明  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_{k+1}(n)}{b_k(n)} = \frac{\alpha}{k+1}$ , 进而递推证明

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_k(n) = \frac{\alpha}{k} \lim_{n \rightarrow \infty} b_{k-1}(n) = \frac{\alpha^k}{k!} e^{-\alpha}.$$

# 复习

**Poisson 极限定律:**

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \binom{n}{k} \left(\frac{\alpha}{n}\right)^k \left(1 - \frac{\alpha}{n}\right)^{n-k} = \frac{\alpha^k}{k!} e^{-\alpha}.$$

**证明方法2 (直接证明):**

$$\begin{aligned} \binom{n}{k} \left(\frac{\alpha}{n}\right)^k \left(1 - \frac{\alpha}{n}\right)^{n-k} &= \frac{n!}{k!(n-k)!} \cdot \frac{\alpha^k}{n^k} \left(1 - \frac{\alpha}{n}\right)^{n-k} \\ &= \frac{\alpha^k}{k!} \left(1 - \frac{\alpha}{n}\right)^n \cdot \frac{n(n-1) \cdots (n-k+1)}{n^k} \cdot \left(1 - \frac{\alpha}{n}\right)^{-k} \\ &\rightarrow \frac{\alpha^k}{k!} e^{-\alpha}. \end{aligned}$$

证毕。

# 复习

**Stirling 公式:**

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! e^n}{n^{n+1/2}} = \sqrt{2\pi}.$$

即

$$n! \sim \sqrt{2\pi n} n^{n+1/2} e^{-n} = (ne^{-1})^n \sqrt{2\pi n}.$$



# 今天主要内容

## 今天主要内容:

- Laplace 定理。
- 正态分布。
- 中心极限定理。

# 定理1

**定理1:** 设  $0 < p < 1$ ,  $q = 1 - p$ ,  $A > 0$ ,  $|x_{nk}| \leq A$ , 其中

$$x_{nk} = \frac{k - np}{\sqrt{npq}}, \quad 0 \leq k \leq n.$$

则当  $n \rightarrow \infty$ , 下列极限成立

$$\binom{n}{k} p^k q^{n-k} \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi npq}} e^{-x_{nk}^2/2}.$$

(这是利用Stirling公式微积分问题)。

**证:** 由于  $k = np + \sqrt{npq}x_{nk}$ ,  $n - k = nq - \sqrt{npq}x_{nk}$ , 得到

$$k \sim np, n - k \sim nq.$$

# 定理1

由Stirling公式

$$\begin{aligned}\binom{n}{k} p^k q^{n-k} &= \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k q^{n-k} \\ &\sim \frac{(ne^{-1})^n \sqrt{2\pi n} p^k q^{n-k}}{(ke^{-1})^k \sqrt{2\pi k} ((n-k)e^{-1})^{n-k} \sqrt{2\pi(n-k)}} \\ &= \sqrt{\frac{n}{2\pi k(n-k)}} \varphi(n, k) \sim \sqrt{\frac{1}{2\pi npq}} \varphi(n, k),\end{aligned}$$

这里注意  $k \sim np$ , 其中,

$$\varphi(n, k) = \left(\frac{np}{k}\right)^k \left(\frac{nq}{n-k}\right)^{n-k}.$$

利用Taylor展开式估计  $\varphi(n, k)$ :

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + \cdots, \quad |x| < 1.$$

# 定理1

$$\begin{aligned}\log\left(\frac{np}{k}\right)^k &= k \log\left(1 - \frac{\sqrt{npq}x_{nk}}{k}\right) = k\left(-\frac{\sqrt{npq}x_{nk}}{k} - \frac{npqx_{nk}^2}{2k^2} - \dots\right), \\ \log\left(\frac{nq}{n-k}\right)^{n-k} &= (n-k) \log\left(1 + \frac{\sqrt{npq}x_{nk}}{n-k}\right) \\ &= (n-k)\left(\frac{\sqrt{npq}x_{nk}}{n-k} - \frac{npqx_{nk}^2}{2(n-k)^2} + \dots\right),\end{aligned}$$

只要下列条件满足

$$\left|\frac{\sqrt{npq}x_{nk}}{k}\right| < 1, \quad \left|\frac{\sqrt{npq}x_{nk}}{n-k}\right| < 1.$$

但 $|x_{nk}| \leq A$ 一致有界, 且 $k \sim np$ , 所以该条件对充分大 $n$ 成立。

# 定理1

上面两式相加得,

$$\begin{aligned}\log \varphi(n, k) &= \log \left( \frac{np}{k} \right)^k + \log \left( \frac{nq}{n-k} \right)^{n-k} \sim -\frac{npqx_{nk}^2}{2k} - \frac{npqx_{nk}^2}{2(n-k)} \\ &\sim -\frac{n^2pqx_{nk}^2}{2k(n-k)} \sim -\frac{x_{nk}^2}{2},\end{aligned}$$

所以得

$$\varphi(n, k) \sim e^{-\frac{x_{nk}^2}{2}}.$$

证毕.

# De Moivre-Laplace 定理

定理：设掷硬币正面出现的概率为  $0 < p < 1$ ，反面出现的概率为  $q$ ， $S_n$  表示掷  $n$  次硬币正面出现的次数，则对任意实数  $-\infty < a < b < +\infty$ ，

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P} \left( a < \frac{S_n - np}{\sqrt{npq}} \leq b \right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-x^2/2} dx.$$

证：令  $x_k = x_{nk} = \frac{k - np}{\sqrt{npq}}$  如上，则左边概率为

$$\sum_{a < x_{nk} \leq b} \mathbb{P}(S_n = k) = \sum_{a < x_{nk} \leq b} \binom{n}{k} p^k q^{n-k}.$$

由前一个定理知：

$$\binom{n}{k} p^k q^{n-k} \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi npq}} e^{-\frac{x_k^2}{2}}.$$

# De Moivre-Laplace 定理 (续)

注意到

$$x_{k+1} - x_k = \frac{1}{\sqrt{npq}}.$$

故有

$$\begin{aligned} \sum_{a < X_{nk} \leq b} \mathbb{P}(S_n = k) &\sim \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{a < x_k \leq b} e^{-\frac{x_k^2}{2}} (x_{k+1} - x_k) \\ &\sim \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-\frac{x^2}{2}} dx. \text{ (为什么?)} \end{aligned}$$

证毕。

# 正态分布(normal distribution)

密度函数为

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}, \quad -\infty < x < +\infty,$$

的分布称为**正态分布**，其分布函数为

$$\Phi(x) := \mathbb{P}(X \leq x) = \int_{-\infty}^x \varphi(t) dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-t^2/2} dt.$$

正态分布也称为**Gauss分布**，或**Laplace-Gauss分布**，等等。验证一下：

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2/2} dt = 1.$$



## 正态分布（续）

密度函数  $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$  满足下列性质:

- 对称性:  $\varphi(-x) = \varphi(x)$ , 即为偶函数。验证

$$2\Phi(x) - 1 = \Phi(x) - \Phi(-x) = \int_{-x}^x \varphi(t) dt.$$

事实上,

$$\begin{aligned}\Phi(x) &= \int_{-\infty}^x \varphi(t) dt = \int_{-x}^{\infty} \varphi(t) dt, \\ \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t) dt &= 1, \\ 2\Phi(x) - 1 &= \int_{-x}^{\infty} \varphi(t) dt + \int_{-\infty}^x \varphi(t) dt - 1 = \int_{-x}^x \varphi(t) dt.\end{aligned}$$

## 正态分布（续）

- 无穷可微性: 各阶导数 $\varphi^{(k)}(x)$ 存在。验证: 对任何 $x > 0$ ,

$$1 - \Phi(x) = \int_x^{\infty} \varphi(u) du \leq \frac{\varphi(x)}{x} = \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}x}.$$

- 总质量为1:  $\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) dx = 1.$

# 正态分布（续）

课堂练习：(1). 计算其力矩生成函数(moment-generating function)或矩母函数:

$$M(\theta) = \mathbb{E}(e^{\theta X}) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{\theta u} \varphi(u) du.$$

(2). 计算其力矩:

$$m^{(n)} = \mathbb{E}(X^n) = \int_{-\infty}^{\infty} u^n \varphi(u) du, \quad n = 0, 1, 2, \dots.$$

## 正态分布（续）

答案：(1).  $M(\theta) = \mathbb{E}(e^{\theta X}) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{\theta u} \varphi(u) du = e^{\theta^2/2}$ 。事实上，

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(e^{\theta X}) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{\theta u} \varphi(u) du = \int_{-\infty}^{\infty} e^{\theta u} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}} du \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\theta u - \frac{u^2}{2}} du \quad \left(\text{利用 } \theta u - \frac{u^2}{2} = -\frac{1}{2}(u-\theta)^2 + \frac{\theta^2}{2}\right) \\ &= \frac{e^{\theta^2/2}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(u-\theta)^2} du \quad (\text{令 } x = u - \theta) \\ &= \frac{e^{\theta^2/2}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}x^2} dx \\ &= e^{\theta^2/2}.\end{aligned}$$

（这是纯粹微积分计算）

## 正态分布（续）

答案：(2). 力矩:  $m^{(2n-1)} = 0$ ,  $m^{(2n)} = \frac{(2n)!}{2^n n!}$ 。事实上,

$$\mathbb{E}(X^{2n-1}) = \int_{-\infty}^{\infty} u^{2n-1} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-u^2/2} du = 0 \quad (\text{因为被积函数是奇函数})$$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X^{2n}) &= \int_{-\infty}^{\infty} u^{2n} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-u^2/2} du \\ &= \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} u^{2n} e^{-u^2/2} du \quad (\text{作变换 } u = \sqrt{2x}) \\ &= \frac{2^n}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} x^{n-\frac{1}{2}} e^{-x} dx = \frac{2^n}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) \\ &= \frac{2^n}{\sqrt{\pi}} \cdot \left(n - \frac{1}{2}\right) \left(n - \frac{3}{2}\right) \cdots \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \quad \text{用公式 } \Gamma(\alpha + 1) = \alpha \Gamma(\alpha) \\ &= 2^n \left(n - \frac{1}{2}\right) \left(n - \frac{3}{2}\right) \cdots \frac{1}{2} = \frac{(2n)!}{2^n n!}. \end{aligned}$$

## 正态分布（续）

定义：对任意实数 $m$ 和任意 $\sigma > 0$ ，称随机变量 $X$ 具有正态分布 $N(m, \sigma^2)$ ，如果变形的随机变量

$$X^* = \frac{X - m}{\sigma}$$

服从单位正态分布，即具有分布函数 $\Phi$ ：

$$\Phi(x) := \mathbb{P}(X^* \leq x) = \int_{-\infty}^x \varphi(t) dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-t^2/2} dt.$$

当 $m = 0, \sigma = 1$ 时， $X^* = X$ 是原来的单位正态分布。

$X$ 的密度函数为

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right) = \frac{1}{\sigma} \varphi\left(\frac{x-m}{\sigma}\right).$$

## 正态分布（续）

事实上， $X$ 的分布函数为

$$\begin{aligned} F(x) &= \mathbb{P}(X \leq x) = \mathbb{P}\left(X^* \leq \frac{x-m}{\sigma}\right) \\ &= \int_{-\infty}^{\frac{x-m}{\sigma}} \varphi(u) du = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{x-m}{\sigma}} e^{-u^2/2} du, \end{aligned}$$

求 $F$ 的一阶导数：

$$F'(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right), -\infty < x < \infty.$$

此为 $X$ 的密度函数，得证。

现计算 $X$ 的矩母函数：

$$\begin{aligned} M_X(\theta) &= \mathbb{E}(e^{\theta X}) = \mathbb{E}(e^{\theta(m+\sigma X^*)}) = e^{m\theta} \mathbb{E}(e^{(\theta\sigma)X^*}) \\ &= e^{m\theta} M(\sigma\theta) = e^{m\theta + \sigma^2\theta^2/2}. \end{aligned}$$

## 正态分布（续）

**定理：** 设随机变量 $X_j$ 独立，具有正态分布 $N(m_j, \sigma_j^2)$ ，则

$$X_1 + X_2 + \cdots + X_n$$

具有正态分布 $N(m_1 + \cdots + m_n, \sigma_1^2 + \cdots + \sigma_n^2)$ 。

**证明：** 仅考虑情况 $n = 2$ 。由独立性，

$$\begin{aligned} M_{X_1+X_2}(\theta) &= M_{X_1}(\theta)M_{X_2}(\theta) = e^{m_1\theta + \sigma_1^2\theta^2/2} e^{m_2\theta + \sigma_2^2\theta^2/2} \\ &= e^{(m_1+m_2)\theta + (\sigma_1^2 + \sigma_2^2)\theta^2/2} \end{aligned}$$

和正态分布 $N(m_1 + m_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$ 的力矩生成函数一样，再由唯一性得证（即若两随机变量的力矩生成函数一样，则它们的概率分布相同）。



# 中心极限定理(Central limit theorem)

设 $X_j$ 是独立的Bernoulli随机变量, 令

$$S_n = X_1 + \cdots + X_n, \quad n \geq 1.$$

知 $\mathbb{E}(X_j) = p, \sigma^2(X_j) = pq$ , 且 $\mathbb{E}(S_n) = np, \sigma^2(S_n) = npq$ . 令

$$X_j^* = \frac{X_j - \mathbb{E}(X_j)}{\sigma(X_j)}; \quad S_n^* = \frac{S_n - \mathbb{E}(S_n)}{\sigma(S_n)} = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=1}^n X_j^*.$$

则

$$\mathbb{E}(X_j^*) = 0, \quad \sigma(X_j^*) = 1,$$

$$\mathbb{E}(S_n^*) = 0, \quad \sigma(S_n^*) = 1.$$

# 中心极限定理(Central limit theorem)

易知

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(S_n = k) &= \mathbb{P}(S_n^* = x_{nk}) = \mathbb{P}\left(S_n^* = \frac{k - np}{\sqrt{npq}}\right) \\ &= \binom{n}{k} p^k q^{n-k}.\end{aligned}$$

令 $\mathbb{P}(S_n^* \leq x) = F_n(x)$ 。由De Moivre-Laplace定理

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (F_n(b) - F_n(a)) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-t^2/2} dt.$$

更一般, 设 $\{X_j, j \geq 1\}$ 是独立的具有相同分布的随机变量 (不一定是Bernoulli分布)。令 $\mathbb{E}(X_j) = m, \sigma^2(X_j) = \sigma^2$ , 其中 $0 < \sigma < \infty$ 。

## 中心极限定理（续）

设  $S_n, S_n^*$  如前，即

$$S_n = X_1 + \cdots + X_n, \quad S_n^* = \frac{S_n - \mathbb{E}(S_n)}{\sigma(S_n)}.$$

知

$$\mathbb{E}(S_n) = nm, \quad \sigma^2(S_n) = n\sigma^2.$$

同样，令

$$X_j^* = \frac{X_j - \mathbb{E}(X_j)}{\sigma(X_j)}; \quad S_n^* = \frac{S_n - \mathbb{E}(S_n)}{\sigma(S_n)} = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=1}^n X_j^*.$$

则一样成立下列式子：

$$\mathbb{E}(X_j^*) = 0, \quad \sigma(X_j^*) = 1,$$

$$\mathbb{E}(S_n^*) = 0, \quad \sigma(S_n^*) = 1.$$

# 中心极限定理（续）

定理（中心极限）：设  $S_n, m, \sigma^2$  如上，则对任意实数  $-\infty < a < b < +\infty$ ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}\left(a < \frac{S_n - nm}{\sqrt{n}\sigma} \leq b\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-x^2/2} dx.$$

证：先证一个引理和一个定理。

# 引理1

**引理1:** 设随机变量 $X$ 满足 $E(X) = 0, \sigma^2(X) = 1$ , 则特征函数 $h$ 满足

$$h(\theta) = 1 - \frac{\theta^2}{2}(1 + \varepsilon(\theta))$$

其中 $\lim_{\theta \rightarrow 0} \varepsilon(\theta) = 0$ . (这是纯微积分问题.)

**证:** 由Taylor展开知

$$h(\theta) = h(0) + h'(0)\theta + \frac{h''(0)}{2}\theta^2(1 + \varepsilon(\theta)).$$

但 $h(\theta) = \mathbb{E}(e^{i\theta X})$ , 形式微分

$$h'(\theta) = \mathbb{E}(e^{i\theta X} iX), \quad h''(\theta) = \mathbb{E}(e^{i\theta X} (iX)^2).$$

$$h'(0) = 0, \quad h''(0) = -1. \text{ 代入. 证毕.}$$

# 定理

定理：设 $\psi_n(\theta) = \mathbb{E}(e^{i\theta S_n^*})$ 是 $S_n^*$ 的特征函数，且对每个 $\theta$ ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \psi_n(\theta) = e^{-\theta^2/2},$$

即随机变量 $S_n^*$ 的特征函数 $\psi_n(\theta)$ 收敛到单位正态分布的特征函数 $e^{-\theta^2/2}$ ，则对每个实数 $x$ ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(S_n^* \leq x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-u^2/2} du = \Phi(x),$$

即随机变量 $S_n^*$ 的分布函数 $F_n(x) = \mathbb{P}(S_n^* \leq x)$ 收敛到单位正态的分布函数。

证明见钟书p.235（略）。

此定理说明：若随机变量 $\{Y_n\}$ 的特征函数收敛到单位正态的特征函数，则 $\{Y_n\}$ 的分布函数也同样收敛到单位正态的分布函数。

# 中心极限定理的证明

证：考虑 $S_n^*$ 的特征函数，并利用有独立性：

$$\mathbb{E}\left(e^{i\theta S_n^*}\right) = \mathbb{E}\left(e^{i\theta(X_1^* + \dots + X_n^*)/\sqrt{n}}\right) = h^n(\theta/\sqrt{n}),$$

其中 $h$ 为 $X_1^*$ 的特征函数。由引理，当 $n \rightarrow \infty$ ,

$$h^n(\theta/\sqrt{n}) = \left(1 - \frac{\theta^2}{2n}(1 + \varepsilon(\theta/\sqrt{n}))\right)^n \rightarrow e^{-\theta^2/2},$$

所以，

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}\left(e^{i\theta S_n^*}\right) = e^{-\theta^2/2}$$

此极限函数和单位正态分布的特征函数一样。再利用前面定理，其对应的分布函数 $F_n$ 收敛到单位正态分布的分布函数 $\Phi$ 。证毕。

# 中心极限定理（续）

中心极限定理可写成

$$\mathbb{P}(x_1\sigma\sqrt{n} < S_n - mn < x_2\sigma\sqrt{n}) \approx \Phi(x_2) - \Phi(x_1).$$

或者（令  $x_2 = x, x_1 = -x$ ）

$$\mathbb{P}(|S_n - mn| < x\sigma\sqrt{n}) \approx \Phi(x) - \Phi(-x) = 2\Phi(x) - 1.$$



# 例子

例题：检测仪器的精确性有误差，误差是随机变量，设服从 $[-1, 1]$ 均匀分布。取 $n$ 次检测值的平均值，问其与精确值相差 $\delta$ 的概率是多少？

- 知道： $n$ 次检测值
- 不知道：精确值
- 目的：想通过检测知道精确值，但每次检测有误差，检测值可能不一样。

# 解答

解：设精确值为 $m$ ，检测值为 $X_j, 1 \leq j \leq n$ ，误差值为 $\xi_j$ ，  
则 $X_j = m + \xi_j$ 。误差值 $\xi_j$ 的密度函数为 $f(u) = \frac{1}{2}, -1 \leq u \leq 1$ 。故

$$\mathbb{E}(\xi_j) = \int_{-1}^1 x \cdot \frac{1}{2} dx = 0, \quad \sigma^2(\xi_j) = \mathbb{E}(\xi_j^2) = \int_{-1}^1 \frac{x^2}{2} dx = \frac{1}{3}.$$

于是， $\mathbb{E}(X_j) = m, \quad \sigma^2(X_j) = \frac{1}{3}$ 。要计算 $\mathbb{P}(|S_n/n - m| < \delta)$ 。

由中心极限定理，该概率等于

$$\begin{aligned} P(|S_n/n - m| < \delta) &= \mathbb{P}\left(|(S_n - mn)/\sqrt{n/3}| < \delta\sqrt{3n}\right) \\ &\approx 2\Phi(\delta\sqrt{3n}) - 1. \end{aligned}$$

# 解答

例如,  $n = 25, \delta = 1/5$ , 回忆函数

$$\Phi(x) := \mathbb{P}(X \leq x) = \int_{-\infty}^x \varphi(t) dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-t^2/2} dt.$$

于是,

$$2\Phi(\delta\sqrt{3n}) - 1 \approx 2\Phi(1.73) - 1 = 2 * 0.95818 - 1 \approx 0.92,$$

这里计算 (或查表)

$$\Phi(1.73) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{1.73} e^{-t^2/2} dt \approx 0.95818.$$

解毕。

# 习题讲解

**P. 200, 第38题:** Let  $S_n = T_1 + \cdots + T_n$ , where the  $T_j$ 's are independent random variables all having the density  $\lambda e^{-\lambda t}$ . Find the Laplace transform of  $S_n$ , and identify the distribution of  $S_n$ . (关键点: 求出 $S_n$ 的密度函数)

解: 事实上,

- 每个随机变量 $T_j$ 的Laplace 变换为: 对任意 $\mu \geq 0$ ,

$$\mathbb{E}(e^{-\mu T_j}) = \int_0^{\infty} e^{-\mu t} \{\lambda e^{-\lambda t}\} dt = \frac{\lambda}{\lambda + \mu}.$$

- 利用独立性,  $S_n$ 的Laplace 变换为

$$\mathbb{E}(e^{-\mu S_n}) = \mathbb{E}(e^{-\mu(T_1 + \cdots + T_n)}) = \mathbb{E}(e^{-\mu T_1}) \cdots \mathbb{E}(e^{-\mu T_n}) = \left(\frac{\lambda}{\lambda + \mu}\right)^n.$$

# 习题讲解

- 另一方面, 若  $S_n$  的密度函数为  $f$ , 则

$$\mathbb{E}(e^{-\mu S_n}) = \int_0^{\infty} e^{-\mu t} f(t) dt \quad \text{而}$$
$$\mu^{-n} = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^{\infty} t^{n-1} e^{-\mu t} dt \quad \forall \mu > 0.$$

故得,  $\forall \mu > 0$ ,

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} e^{-\mu t} f(t) dt &= \mathbb{E}(e^{-\mu S_n}) = \left(\frac{\lambda}{\lambda + \mu}\right)^n = \frac{\lambda^n}{(n-1)!} \int_0^{\infty} t^{n-1} e^{-(\lambda+\mu)t} dt \\ &= \int_0^{\infty} e^{-\mu t} \left\{ \frac{\lambda^n}{(n-1)!} t^{n-1} e^{-\lambda t} \right\} dt \end{aligned}$$

由Laplace变换的惟一性(见下面)知,  $f(t) = \frac{\lambda^n}{(n-1)!} t^{n-1} e^{-\lambda t}$ .

# 习题讲解

- 最后,  $S_n$  的分布为

$$\mathbb{P}(a < S_n < b) = \int_a^b f(t) dt = \frac{\lambda^n}{(n-1)!} \int_a^b t^{n-1} e^{-\lambda t} dt.$$

解毕。

**Laplace** 变换的惟一性: 若  $f, g$  满足某种增长性条件 (如不超过指数增长), 且它们的 **Laplace** 变换相同, 即

$$\int_0^{\infty} e^{-\mu t} f(t) dt = \int_0^{\infty} e^{-\mu t} g(t) dt, \quad \forall \mu > 0,$$

则  $f = g$ .

## 题目讲解（另一种解法）：P. 197, 第24题

题目：电子元件的使用寿命服从指数密度 $\lambda e^{-\lambda t}$ （单位：小时），已知电子元件已经使用了 $n$ 个小时，问还可以平均使用多长时间？（此题求条件期望）

解：若 $X$ 为取非负值的连续随机变量，则

$$\mathbb{E}(X) = \int_0^{\infty} \mathbb{P}(X \geq u) du.$$

上次答案：

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(T|T > n) &= \int_0^{\infty} \mathbb{P}(T > n + t | T > n) dt = \int_0^{\infty} \mathbb{P}(T > t) dt \\ &= \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} dt = \frac{1}{\lambda}, \end{aligned}$$

其中 $\mathbb{P}(T > t) = \int_t^{\infty} f(u) du = \int_t^{\infty} \lambda e^{-\lambda u} du = e^{-\lambda t}$ 。

## 题目讲解（另一种解法）

解法二：设 $T$ 表示电子元件的使用寿命，是一个随机变量，密度函数为 $f(u) = \lambda e^{-\lambda u}, u > 0$ 。令

$$X = \begin{cases} n, & T \leq n, \\ n + T, & T > n, \end{cases}$$

它表示已经使用了 $n$ 个小时的电子元件的使用寿命，也是一个随机变量，且 $P(X < n) = 0$ 。欲求

$$\mathbb{E}(X) - n,$$

即欲求电子元件再可以平均使用多长时间。事实上，

$$\mathbb{E}(X) = \int_0^{\infty} \mathbb{P}(X \geq u) du = \int_0^n \mathbb{P}(X \geq u) du + \int_n^{\infty} \mathbb{P}(X \geq u) du.$$



## 题目讲解（另一种解法）

现分别计算上述两项。第一项

$$\int_0^n \mathbb{P}(X \geq u) du = \int_0^n (1 - \mathbb{P}(X < u)) du = \int_0^n (1 - 0) du = n,$$

因为当  $u \leq n$  时,  $\mathbb{P}(X < u) \leq \mathbb{P}(X < n) = 0$ 。同时, 第二项

$$\begin{aligned} \int_n^\infty \mathbb{P}(X \geq u) du &= \int_n^\infty \mathbb{P}(n + T \geq u) du = \int_n^\infty \mathbb{P}(T \geq u - n) du \\ &= \int_0^\infty \mathbb{P}(T \geq t) dt \quad (\text{做变换 } t = u - n) \\ &= \int_0^\infty e^{-\lambda t} dt = \frac{1}{\lambda}, \end{aligned}$$

这里用到当  $u \geq n$  时, 由  $X$  的定义,  $X = n + T$ , 故

$$\mathbb{P}(X \geq u) = \mathbb{P}(n + T \geq u).$$

## 题目讲解（另一种解法）

从而，

$$\mathbb{E}(X) = \int_0^n \mathbb{P}(X \geq u) du + \int_n^\infty \mathbb{P}(X \geq u) du = n + \frac{1}{\lambda}.$$

所以，电子元件再可以平均使用

$$\mathbb{E}(X) - n = n + \frac{1}{\lambda} - n = \frac{1}{\lambda} \text{ (小时)}.$$

解毕。

课后思考题：求随机变量 $X$ 的密度函数？

# 作业

第9周作业（钟书）

P. 247-248: 第10, 12, 13, 15, 16, 17题.

本周有习题课

下周（第10周）采用雨课堂教学模式，请携带手机

预习内容：各种分布（**3S书第108-150页**）