概率论与数理统计

任课教师: 胡家信

清华大学数学科学系

2021 年 10 月 11 日

上周内容总结

- 密度函数：(1) $f(u) \geq 0$; (2) $\int_{-\infty}^{\infty} f(u)du = 1$。
- 分布函数：$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(u)du$。
- 数学期望：$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} uf(u)du$。

  更一般，随机变量$\varphi(X)$的数学期望为

$$E(\varphi(X)) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(u)f(u)du.$$

上周内容总结

- **Borel域**$\mathcal{F}$（或σ-**代数**）：是一个集合，该集合关于**补运算**和**可数并运算是封闭**的。

- **随机变量**：Ω上的一个实值可测函数X，即对任意实数x，集合
$$\{\omega : X(\omega) \le x\} \in \mathcal{F}.$$

- **一元分布函数**：$F(X) = P(X \le x)$。

- **二元分布函数**：$F(x, y) = P(X \le x, Y \le y)$（后一个逗号表示**交运算**）。

上周内容总结

- 二元随机变量(X, Y)的**密度函数**$f(u, v)$:

$$F(x, y) = P(X \le x, Y \le y) = \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{y} f(u, v) dvdu,$$

- $P((X, Y) \in S) = \int\int_S f(u, v) dvdu$。
- **数学期望**$E(\varphi(X, Y))$:

$$E(\varphi(X, Y)) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(u, v) f(u, v) dvdu.$$

上周内容总结

- 已知二元随机变量(X,Y)的**密度函数**$f(u,v)$，则

$$P(X\le x)=P(X\le x,-\infty<Y<\infty)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{\infty}f(u,v)dvdu$$
$$=\int_{-\infty}^{x}f_X(u)du,$$

其中函数$f_X(u)=\int_{-\infty}^{\infty}f(u,v)dv$为$X$的**密度函数**（边际密度）。同理，关于$Y$的**密度函数**为

$$f_Y(v)=\int_{-\infty}^{\infty}f(u,v)du.$$

- 条件概率:$P(A|S)=\frac{P(AS)}{P(S)}$。

上周内容总结

注意下列公式成立的条件!

(1). $P(A_1A_2\cdots A_n) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1A_2)\cdots P(A_n|A_1A_2\cdots A_{n-1}).$

（条件：$P(A_1A_2\cdots A_{n-1}) > 0$）

(2). $P(B) = \sum_n P(A_n)P(B|A_n).$

（条件：$\{A_n\}$是Ω不相交的分割，即$\Omega = \sum_n A_n$）

(3). $P(A_n|B) = \dfrac{P(A_n)P(B|A_n)}{\sum_k P(A_k)P(B|A_k)}$(**Bayes定理**).

（条件：$P(B) > 0$）

更多例子

例： 掷6个色子，问出现6个不同点数的概率是多少?

（猜一猜或直接计算）

例子

解：令$A_1 = \{$色子1的任意点$\}$，

$$A_2 = \{\text{色子2的出现的点数不同于色子1}\},$$

$$A_3 = \{\text{色子3的出现的点数不同于色子1和色子2}\},$$

等等，直到A_6。则

$$P(A_1) = 1, P(A_2|A_1) = \frac{5}{6}, P(A_3|A_1A_2) = \frac{4}{6},$$
$$\cdots, P(A_6|A_1A_2\cdots A_5) = \frac{1}{6}.$$

所以

$$P(A_1A_2\cdots A_6) = \frac{6}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{4}{6}\cdot\frac{3}{6}\cdot\frac{2}{6}\cdot\frac{1}{6} = \frac{6!}{6^6}.$$

例子

例：箱子U_1装**2**个黑球**3**个红球，箱子U_2装**3**个黑球**2**个红球。抛硬币决定箱子，但不知道哪个箱子是U_1，哪个箱子是U_2。设第**1**次抽取的是黑球，放回箱子，问第**2**次从同一箱子抽取的也是黑球的概率是多少**?**（猜一猜？）

例子

解：$P(U_1)=P(U_2)=\frac{1}{2}$。令$B_1$="第1只球是黑色"，$B_2$="第2次从同一箱子抽取的也是黑球"。欲求$P(B_2|B_1)$。易知，

$$
\begin{aligned}
P(U_1|B_1) &= \frac{P(U_1B_1)}{P(B_1)} = \frac{P(U_1)P(B_1|U_1)}{P(U_1)P(B_1|U_1)+P(U_2)P(B_1|U_2)} \\
&= \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{5}}{\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{5}+\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{5}} = \frac{2}{5}, \\
P(U_2|B_1) &= \frac{3}{5}. \quad (\text{注: } P(U_1|B_1)+P(U_2|B_1)=1)
\end{aligned}
$$

记$A_1=\{$从U_1得到$B_1\}$，$A_2=\{$从U_2得到$B_1\}$。那末

$$
\begin{aligned}
P(A_1) &= P(U_1|B_1) = \frac{2}{5}, \\
P(A_2) &= P(U_2|B_1) = \frac{3}{5}.
\end{aligned}
$$

另一方面，显然，

$$P\left((B_2|B_1)|A_1\right)=\frac{2}{5}, P\left((B_2|B_1)|A_2\right)=\frac{3}{5}.$$

利用

$$P(B_2|B_1)=P(A_1)P\left((B_2|B_1)|A_1\right)+P(A_2)P\left((B_2|B_1)|A_2\right),$$

故所求概率为

$$P(B_2|B_1)=\frac{2}{5}\cdot\frac{2}{5}+\frac{3}{5}\cdot\frac{3}{5}=\frac{13}{25}.$$

解毕。

课堂练习

课堂练习题：条件如上，计算

1. $P(U_1|B_1B_2)$。
2. $P(U_2|B_1B_2)$。
3. $P(B_3|B_1B_2)$，即第3次从同一箱子抽取的也是黑球的概率。

答案

解：1 注意

$$P(U_1B_1B_2) = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{2}{5} = \frac{2}{25},$$

$$P(B_1B_2) = P(U_1)P(B_1B_2|U_1) + P(U_2)P(B_1B_2|U_2)$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{2}{5}\right)^2 + \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{13}{50}$$

故所求概率为

$$P(U_1|B_1B_2) = \frac{P(U_1B_1B_2)}{P(B_1B_2)} = \frac{2/25}{13/50} = \frac{4}{13}.$$

2 同理 $P(U_2|B_1B_2) = \frac{9}{13}$。

答案

解：3 利用公式

$$P(B_3|B_1B_2) = P(U_1|B_1B_2)P\left((B_3|B_1B_2)|(U_1|B_1B_2)\right) + P(U_2|B_1B_2)P\left((B_3|B_1B_2)|(U_2|B_1B_2)\right)$$

由前面计算知，

$$P(U_1|B_1B_2) = \frac{4}{13},\ P(U_2|B_1B_2) = \frac{9}{13},$$

并且，容易计算，

$$P\left((B_3|B_1B_2)|(U_1|B_1B_2)\right) = \frac{2}{5},\quad P\left((B_3|B_1B_2)|(U_2|B_1B_2)\right) = \frac{3}{5},$$

故所求概率为

$$P(B_3|B_1B_2) = \frac{4}{13}\cdot\frac{2}{5} + \frac{9}{13}\cdot\frac{3}{5} = \frac{7}{13}.$$

解毕。

例：设太阳连续n次从东方升起，问再次从东方升起的概率是多少？

解：太阳每天升起的概率为**未知常数**，假设它平均在$[0,1]$取值，看成是$[0,1]$上具有均匀分布的随机变量ξ，其密度函数f满足$f(u)=1, 0\le u\le 1$。于是，$P(u\le\xi\le u+du)=du,\quad 0\le u\le 1$。
设S^n表示太阳连续n次从东方升起的概率，则$P(S^n|\xi=u)=u^n$，

$$P(S^n)\sim\sum_{0\le u\le 1}P(\xi=u)P(S^n|\xi=u)=\int_0^1 duP(S^n|\xi=u)$$

$$=\int_0^1 u^n du=\frac{1}{n+1}\quad\text{（问题难点）}$$

从而，我们得到所求概率

$$P(S^{n+1}|S^n) = \frac{P(S^{n+1}S^n)}{P(S^n)} = \frac{P(S^{n+1})}{P(S^n)}$$
$$= \frac{\frac{1}{n+2}}{\frac{1}{n+1}} = \frac{n+1}{n+2}.$$

解毕。

题目：一只箱子装b个黑球和r个红球，每次抽一个球不放回。设$X_n = 1$表示第n次抽得黑球，$X_n = 0$表示第n次抽得红球。考虑下列序列

$$X_1(\omega), X_2(\omega), \cdots, X_{b+r}(\omega),$$

简单地写成$\{X_n, 1 \leq n \leq b+r\}$。此序列称为一个**随机过程** (stochastic process)。

问题：抽一个球不知其颜色扔掉，问第2只球是黑色的概率？（猜一猜？第1只球是黑色的概率？）

讨论： 设$B_n = \{X_n = 1\}$, $B_n^c = \{X_n = 0\}$。

$$P(B_2) = P(B_1)P(B_2|B_1) + P(B_1^c)P(B_2|B_1^c).$$

显然

$$P(B_1) = \frac{b}{b+r}, \quad P(B_1^c) = \frac{r}{b+r}.$$

易计算

$$P(B_2|B_1) = \frac{b-1}{b+r-1}, \quad P(B_2|B_1^c) = \frac{b}{b+r-1}.$$

从而

$$P(B_2) = \frac{b}{b+r}\cdot\frac{b-1}{b+r-1} + \frac{r}{b+r}\cdot\frac{b}{b+r-1} = \frac{b}{b+r}.$$

于是，

$$P(B_2) = P(B_1) = \frac{b}{b+r}.$$

巧合？

课堂练习题：分别求

1. $P(B_3|B_1B_2^c)$;
2. $P(B_4|B_2)$（第1、3次扔掉球的颜色不知）；
3. $P(B_4|B_1B_3^c)$（第2次扔掉球的颜色不知）.

序列抽样

答案：

- 事件$B_3|B_1B_2^c$表示已知第一次抽出黑球、第二次抽出红球扔掉、第三次抽出黑球。注意第三次抽出黑球之前，箱子里有$b+r-2$个球，其中黑球有$b-1$个，红球有$r-1$个，故第三次抽出黑球的概率为

$$P(B_3|B_1B_2^c) = \frac{b-1}{b+r-2}.$$

- 下列答案是否对？

$$P(B_4|B_2) = \frac{b-1}{b+r-1},$$
$$P(B_4|B_1B_3^c) = \frac{b-1}{b+r-2}.$$

定理：问题如上，则对任意$1 \le n \le b+r$，有

$$P(B_n) = \frac{b}{b+r},$$

即抽一个球不看颜色扔掉，则第n次抽取黑球的概率为$\frac{b}{b+r}$。

该题本质：条件概率。每次抽取不知颜色。下介绍2种解法。

方法1（直接计算，利用排列组合知识）：引入随机变量$Y_n = \{$前n次抽取中黑球的个数$\}$。

$$P(B_{n+1}|Y_n = j) = \frac{b-j}{b+r-n}, \quad 0 \le j \le b.$$

另一方面，可计算（**参考第二次课件，球标号、不放回、不考虑顺序；相当一次性抽取若干球**）

$$P(Y_n = j) = \frac{\binom{b}{j}\binom{r}{n-j}}{\binom{b+r}{n}}.$$

所以，第$n+1$次抽的球是黑球的概率为

$$P(B_{n+1})=\sum_{j=0}^{b}P(Y_n=j)P(B_{n+1}|Y_n=j)=\sum_{j=0}^{b}\frac{\binom{b}{j}\binom{r}{n-j}}{\binom{b+r}{n}}\cdot\frac{b-j}{b+r-n}.$$

剩下问题：如何化简该公式？每项计算：

$$\frac{b!}{j!(b-j)!}\cdot\frac{r!}{(n-j)!(r-n+j)!}\cdot\frac{n!(b+r-n)!}{(b+r)!}\cdot\frac{b-j}{b+r-n}$$

课后练习：证明

$$\frac{b!}{j!(b-j)!}\cdot\frac{r!}{(n-j)!(r-n+j)!}\cdot\frac{n!(b+r-n)!}{(b+r)!}\cdot\frac{b-j}{b+r-n}$$
$$=\frac{1}{\binom{b+r}{b}}\binom{b+r-n-1}{b-j-1}\binom{n}{j}.$$

所以，利用恒等式$\sum_j\binom{k}{j}\binom{m-k}{i-j}=\binom{m}{i}, k<m$（下面将证明），

$$P(B_{n+1})=\frac{1}{\binom{b+r}{b}}\sum_j\binom{n}{j}\binom{b+r-n-1}{b-j-1}=\frac{1}{\binom{b+r}{b}}\binom{b+r-1}{b-1}=\frac{b}{b+r},$$

这里利用了恒等式，$k=n, m=r+b-1, i=b-1$。

证明：$\sum_j \binom{k}{j}\binom{m-k}{n-j} = \binom{m}{n}, k < m$。

证明：利用等式$(1+x)^k \cdot (1+x)^{m-k} = (1+x)^m$。左边展开为

$$\sum_j \binom{k}{j} x^j \cdot \sum_i \binom{m-k}{i} x^i = \sum_j \sum_i \binom{k}{j}\binom{m-k}{i} x^{j+i}.$$

令$j+i=n$，即$i=n-j$，于是x^n的系数为

$$\sum_j \binom{k}{j}\binom{m-k}{n-j}.$$

右边展开为$\sum_j \binom{m}{j} x^j$，知x^n的系数为$\binom{m}{n}$。由于两边x^n的系数相同，故所证等式成立。证毕。

方法2(Poisson方法)：将黑球从1至b标号，红球从$b+1$至$b+r$标号，所有球都是可区分的，情形相当于**不放回、有序**的取样(**思考一下：为什么？**)。我们研究第$n+1$只球是黑色的概率，那么有多少种情况呢？

分析：第$n+1$只球是黑色的球，可从b个黑球选取（前面球的颜色不知）。一旦第$n+1$只球选取，前n个球从剩下的$b+r-1$个球选取，有

$$(b+r-1)((b+r-1)-1)\cdots((b+r-1)-(n-1))$$

种方式选取。故第$n+1$只球是黑色的情况，总共有

$$b(b+r-1)((b+r-1)-1)\cdots((b+r-1)-(n-1)) \quad \text{种}.$$

而从$b+r$个球中选取$n+1$个球的方式有

$$(b+r)((b+r)-1)\cdots((b+r)-n) \quad \text{种}$$

故所求概率为

$$P(B_{n+1}) = \frac{b(b+r-1)(b+r-2)\cdots(b+r-n)}{(b+r)(b+r-1)\cdots(b+r-n)} = \frac{b}{b+r}.$$

解毕。

思想：概率不受以前抽取的影响，只要你对以前的结果不知道。

课外思考题：研究**Polya**模型（见**P.136**）.

独立随机变量：取可数值的随机变量$X_1, X_2, \cdots, X_n$是**独立**的，若对任意实数$x_1, x_2, \cdots, x_n$，有

$$P(X_1 = x_1, \cdots, X_n = x_n) = P(X_1 = x_1) \cdots P(X_n = x_n).$$

注意：该定义含很多信息。

随机变量的独立性（取可数值）

命题1：设取可数值的随机变量$X_1, X_2, \cdots, X_n$是独立的，则对任意可数集$S_1, S_2, \cdots, S_n$:

$$P(X_1 \in S_1, \cdots, X_n \in S_n) = P(X_1 \in S_1) \cdots P(X_n \in S_n).$$

证明：若$S_i = \{x_i\}$，此条件推出前面的条件，因此，只需证明前面的条件推出此条件。左边等于

$$\begin{aligned}
&\sum_{x_1 \in S_1} \cdots \sum_{x_n \in S_n} P(X_1 = x_1, \cdots, X_n = x_n) \\
&= \sum_{x_1 \in S_1} \cdots \sum_{x_n \in S_n} P(X_1 = x_1) \cdots P(X_n = x_n) \\
&= \sum_{x_1 \in S_1} P(X_1 = x_1) \cdots \sum_{x_n \in S_n} P(X_n = x_n) \\
&= P(X_1 \in S_1) \cdots P(X_n \in S_n).
\end{aligned}$$
证毕

随机变量的独立性（取可数值）

命题2： 设取**可数值**的随机变量$X_1, X_2, \cdots, X_n$是独立的。则事件

$$\{X_1 \in S_1\}, \cdots, \{X_n \in S_n\}$$

是独立的。

证明： 见钟开来书p.143（略）。

命题3：设取**可数值**的随机变量$X_1, X_2, \cdots, X_n$是独立的，$\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_n$ 是定义在$(-\infty, \infty)$上的任意实值函数,则随机变量

$$\varphi_1(X_1), \varphi_2(X_2), \cdots, \varphi_n(X_n)$$

是独立的。

证明：令$S_i = \{x : \varphi_i(x) = y_i\}$。故事件

$$\{\omega \in \Omega : \varphi_i(X_i(\omega)) = y_i\} = \{X_i \in S_i\}.$$

由上面命题知，事件$\{X_1 \in S_1\}, \cdots, \{X_n \in S_n\}$是独立的，故上述随机变量是独立的。证毕。

随机变量的独立性（取一般值，可数或不可数值）

定义：称对一般的随机变量$X_1, X_2, \cdots, X_n$**是独立的**，当且仅当对任意实数$x_1, x_2, \cdots, x_n$，事件

$$\{X_1 \le x_1\}, \{X_2 \le x_2\}, \cdots, \{X_n \le x_n\}$$

是独立的。特别地，

$$P(X_1 \le x_1, \cdots, X_n \le x_n) = P(X_1 \le x_1) \cdots P(X_n \le x_n),$$

即用分布函数的语言:

$$F(x_1, \cdots, x_n) = F_1(x_1) \cdots F_n(x_n),$$

或者，用**密度函数**的语言:

$$P(X_1 \in S_1, \cdots, X_n \in S_n) = \left\{\int_{S_1} f_1(u)du\right\} \cdots \left\{\int_{S_n} f_n(u)du\right\}$$
$$= \int_{S_1} \cdots \int_{S_n} f_1(u_1) \cdots f_n(u_n) du_n \cdots du_1,$$

但左边等于

$$\int_{S_1} \cdots \int_{S_n} f(u_1, \cdots, u_n) du_n \cdots du_1.$$

所以，

$$f(u_1, \cdots, u_n) = f_1(u_1) \cdots f_n(u_n).$$

例子

例：掷色子，4次中至少有一次出现点"6"的概率是多少?

- **不用**随机变量（利用独立性）。
- **利用**随机变量（利用独立性）。

例子

解：设$X_n(1 \le n \le 4)$表示第n次时色子的点数，是随机变量。注意

$$P(X_n = k) = \frac{1}{6}, \quad k = 1, 2, \cdots, 6,$$

且X_1, X_2, X_3, X_4是独立的。令$A_n = \{X_n = 6\}$，欲求事件$A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4$的概率。计算知，

$$P(A_1^c A_2^c A_3^c A_4^c) = P(A_1^c)P(A_2^c)P(A_3^c)P(A_4^c) = \left(\frac{5}{6}\right)^4;$$

故所求概率为

$$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^4 = \frac{671}{1296} \simeq 0.5177.$$

解毕。

例子

一次掷2个色子，问掷24次中，至少有一次两个色子同时出现点"6"的概率是多少?

- **不用**随机变量（利用独立性）。
- **利用**随机变量（利用独立性）。

例子

解：定义(X_n', X_n'')是第n次掷两个色子所出现的结果，令

$$B_n = \{X_n' = 6; X_n'' = 6\}.$$

则$P(B_n^c) = \frac{35}{36}$，及

$$P(B_1^c B_2^c \cdots B_{24}^c) = \left(\frac{35}{36}\right)^{24};$$

故所求概率为

$$P(B_1 \cup B_2 \cdots \cup B_{24}) = 1 - \left(\frac{35}{36}\right)^{24} = \frac{671}{1296} \simeq 0.4914.$$

习题讲解（钟开来书，第71页20题）

An airport shuttle bus makes 4 scheduled stops for 15 passengers. What is the probability that all of them get off at the same stop? What is the probability that someone (at least one person) gets off at each stop?

- 乘客不可分。
- 乘客可分。

习题讲解（钟开来书，第71页20题）

为简单起见，先考虑3个乘客在2个站下车的情形。

- **乘客不可分。** 相当有$2-1=1$个挡板、将3个乘客、如何隔开，或者在$3+1=4$个位置中，如何找一个位置放竖线（挡板）。有$\binom{3+(2-1)}{2-1}=4$种情形。**故所有人在同一个站下车的概率**为$2/4=1/2$。**每站至少一人下车的概率为**$2/4=1/2$。(事实上，现在每个车站放上一人，然后考虑剩余$3-2=1$乘客下车情形，有2种情形。)
- **如果乘客可分呢？有**$1+3+3+1=8=2^3$**情形(为什么？)**

$$0|123,\ 1|23,\ 2|31,\ 3|21,\ 23|1,\ 13|2,\ 12|3,\ 123|0$$

然后求所有人在同一个站下车的概率（略）、每站至少一人下车的概率（较复杂，略）。

习题讲解（钟开来书，第71页20题）

- 乘客不可分。15个乘客在4个站下车，共有

$$\binom{15+(4-1)}{4-1}=\binom{18}{3}.$$

种情形（为什么？）。(注意：m个乘客在n个站下车，共有

$$\binom{m+(n-1)}{n-1}=\binom{m+n-1}{n-1}.$$

种情形。)故所有人在同一个站下车的概率为$4/\binom{18}{3}$，每站至少一人下车的概率为$\binom{14}{3}/\binom{18}{3}$ (事实上，先在每站放上一人，然后考虑$15-4=11$个乘客在4个车站下车情形，有$\binom{11+(4-1)}{4-1}=\binom{14}{3}$种情形。)

- 乘客可分。每个乘客可在4个站的任何一个站下车，有4种选择，15个乘客共有4^{15}种选择。他们在同一个站下车的情形有4种，故同一个站下车的概率为

$$\frac{4}{4^{15}} = \frac{1}{4^{14}}.$$

每个站至少1名乘客下车的情形有多少种(思考题，较复杂)?

The Polish mathematician Banach kept two match boxes, one in each pocket. Each box contains n matches. Whenever he wanted a match he reached at random into one of his pockets. When he found that the box he picked was empty, what is the distribution of the number of matches left in the other box?

巴拿赫有两盒火柴，左、右口袋各一盒，每盒有n根火柴，随机取，发现一盒空，问另一盒含k根火柴的概率？

†巴拿赫（Stefan Banach，1892年3月30日-1945年8月31日）是著名的波兰数学家，患肺癌去世，曾考虑提名为波兰的教育部长。

解：

- 右口袋空，左口袋剩k根火柴。此时，有$n+(n-k)+1$次动作，其中n次动作伸向右口袋，$n-k$次动作伸向左口袋，而最后一次即第$n+(n-k)+1$次动作又伸向右口袋，但发现是空的。由于每次伸向左、右口袋的概率均为$\frac{1}{2}$，故此事件发生的概率为

$$\binom{n+(n-k)}{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{n}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-k}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)=\binom{2n-k}{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{2n-k+1}.$$

- 同理，左口袋空，右口袋剩k根火柴，该事件的概率一样。
- 因此，另一盒含k根火柴的概率

$$P(X=k)=2\cdot\binom{2n-k}{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{2n-k+1}=\binom{2n-k}{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{2n-k}.$$

解毕。

一个附带结果：

- 将另一盒含k根火柴的所有情形相加，我们得到的结果为1:

$$P(X=0)+P(X=1)+\cdots+P(X=n)=1,$$

所以，

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{2n-k}{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{2n-k}=1.$$

•**直接证明：**令$A_n=\sum_{k=0}^{n}\binom{2n-k}{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{2n-k}$。当$n=1$时，有

$$A_1=\binom{2-0}{1}\left(\frac{1}{2}\right)^{2-0}+\binom{2-1}{1}\left(\frac{1}{2}\right)^{2-1}=1.$$

现证明$A_{n+1}=A_n$对任意整数$n\geq 1$都成立。

证明$A_{n+1} = A_n$

注意到$\binom{a+1}{b+1} = \binom{a}{b} + \binom{a}{b+1}$。

$$
\begin{aligned}
A_{n+1} &= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{2n+2-k}{n+1} \left(\frac{1}{2}\right)^{2n+2-k} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{2n+2-k}{n+1} \left(\frac{1}{2}\right)^{2n+2-k} + \binom{n+1}{n+1}\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \left[\binom{2n+1-k}{n} + \binom{2n+1-k}{n+1}\right] \left(\frac{1}{2}\right)^{2n+2-k} + \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}.
\end{aligned}
$$

- 右边第一项为

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} \binom{2n+1-k}{n} \left(\frac{1}{2}\right)^{2n+2-k} &= \frac{1}{2} \sum_{m=-1}^{n-1} \binom{2n-m}{n} \left(\frac{1}{2}\right)^{2n-m} \quad (\text{令} m = k-1) \\
&= \frac{1}{2}\left[A_n + \binom{2n+1}{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{2n+1} - \left(\frac{1}{2}\right)^{n}\right]
\end{aligned}
$$

证明$A_{n+1} = A_n$

- 右边第二项为

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{2n+1-k}{n+1}\left(\frac{1}{2}\right)^{2n+2-k} = \sum_{k=0}^{n-1}\binom{2n+1-k}{n+1}\left(\frac{1}{2}\right)^{2n+2-k} + \left(\frac{1}{2}\right)^{n+2}$$

但是，上面右边**第一项**等于

$$\sum_{k=0}^{n-1}\left[\binom{2n-k}{n} + \binom{2n-k}{n+1}\right]\left(\frac{1}{2}\right)^{2n+2-k}$$

逐项计算上式，右端第一项如下

$$\sum_{k=0}^{n-1}\binom{2n-k}{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{2n+2-k} = \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{n-1}\binom{2n-k}{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{2n-k} = \frac{1}{4}\left[A_n - \left(\frac{1}{2}\right)^{n}\right]$$

证明$A_{n+1} = A_n$

右端第二项如下

$$\sum_{k=0}^{n-1}\binom{2n-k}{n+1}\left(\frac{1}{2}\right)^{2n+2-k} = \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{n-1}\binom{2n-k}{n+1}\left(\frac{1}{2}\right)^{2n-k}$$

$$= \frac{1}{4}\sum_{m=2}^{n+1}\binom{2n-m+2}{n+1}\left(\frac{1}{2}\right)^{2n-m+2} \quad (\text{令} m = k+2)$$

$$= \frac{1}{4}\left[A_{n+1} - \binom{2n+1}{n+1}\left(\frac{1}{2}\right)^{2n+1} - \binom{2n+2}{n+1}\left(\frac{1}{2}\right)^{2n+2}\right].$$

综合所有式子，我们得

$$A_{n+1} = \frac{3}{4}A_n + \frac{1}{4}A_{n+1} + \left\{\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} + \left(\frac{1}{2}\right)^{n+2} + \left(\frac{1}{2}\right)^{2n+2}\binom{2n+1}{n}\right.$$

$$\left. - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+2} - \left(\frac{1}{2}\right)^{2n+3}\binom{2n+1}{n+1} - \left(\frac{1}{2}\right)^{2n+4}\binom{2n+2}{n+1}\right\}.$$

证明$A_{n+1} = A_n$

整理大括号中的项，其和为零，因为

$$4\binom{2n+1}{n} - 2\binom{2n+1}{n+1} - \binom{2n+2}{n+1} = 0$$

所以，

$$A_{n+1} = \frac{3}{4}A_n + \frac{1}{4}A_{n+1}$$

即$A_{n+1} = A_n$。证毕。

作业

- 第5周作业(钟开来书)：

P. 158-163：第11，16，17，18，23，25，28，41题。

- **教师办公时间更改：**每周四16：00-17：00（不用预约），地点不变（理科楼A320）。

- **习题课时间：**周次7，9，11，13，15。

周二第六大节（19：20-20：55），地点: 六教6A316。

周三第六大节（19：20-20：55），地点: 六教6A316。

周四第六大节（19：20-20：55），地点: 六教6A316。

- **预习内容：均值、例子**