概率论与数理统计

任课教师: 胡家信

清华大学数学科学系

2021 年 10 月 5 日

上周内容总结

- **随机变量**：定义域在可数样品空间Ω上的任何**数值函数**X，均称为一个随机变量，即
$$X : \Omega \to (-\infty, \infty),$$
记为$X(\omega)$（比较函数$f(x)$）。

上周内容总结

- **分布函数：**$F(x) = P(X \le x)$，它是我们常见普通的函数，满足下列性质：

  (a) F **是单增的：**若$x_1 < x_2$，则$F(x_1) \le F(x_2)$。

  (b) $F(-\infty) = 0$和$F(+\infty) = 1$。

  (c) **右连续:**
  $$F(x+0) = F(x) = \lim_{k\to\infty} P\Big(X \le x + \frac{1}{k}\Big),$$
  和**左极限存在:**
  $$F(x-0) = \lim_{k\to\infty} P\Big(X \le x - \frac{1}{k}\Big),$$
  但**可能**$F(x+0) \neq F(x-0)$。

问函数$F(x) = x^2$和$F(x) = 1 - e^{-x}$分别是$(-\infty, \infty)$上的分布函数吗??

上周内容总结

样品空间Ω是可数的(有限或者无限)

- **数学期望：**

$$E(X)=\sum_{\omega\in\Omega}X(\omega)P(\{\omega\}),$$

即X在一点的值，乘以对应的概率，再全部加起来得到的值，就是数学期望。

- 更一般

$$E(\varphi(X))=\sum_{\omega\in\Omega}\varphi(X(\omega))P(\{\omega\}).$$

- **如果样品空间Ω是不可数**（此时没有级数运算，即当Ω不可数时，级数$\sum_{\omega\in\Omega}$没有定义），如何定义数学期望呢？

定义：定义在$\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$上的函数$f$称为**密度函数**，若满足

(1) $f(u) \geq 0$ 对所有$u \in \mathbb{R}$; **(2)** $\int_{-\infty}^{\infty} f(u)du = 1$。

此处积分理解为Riemann积分；若函数f连续，或分片连续，则Riemann积分在有限区间(a, b)存在，但此处为非正常积分，若想积分存在，需函数在无穷远处很小。

例：证明

$$f(u) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \exp\left(-\frac{u^2}{4}\right), \quad -\infty < u < +\infty,$$

为密度函数。

例子

证明： 显然$f(u) \ge 0$对任意$u \in (-\infty, \infty)$，并且

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} f(u)du &= \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{u^2}{4}\right) du \\
&= \frac{2}{\sqrt{4\pi}} \int_{0}^{\infty} \exp\left(-\frac{u^2}{4}\right) du \quad \text{（偶函数）} \\
&= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{0}^{\infty} x^{-1/2} \exp(-x)\, dx \quad \text{（令} u = 2\sqrt{x}\text{）} \\
&= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = 1.
\end{aligned}$$

故$f(u)$为密度函数。证毕。

注：Gamma函数$\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} x^{\alpha-1} \exp(-x)\, dx \quad (\alpha > 0)$满足性质：$\Gamma(\alpha+1) = \alpha\Gamma(\alpha)$以及$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$。

课堂思考题

课堂思考题：问函数

$$f(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right), \quad -\infty < u < +\infty,$$

是否为密度函数？

具有密度的随机变量(不可数样品空间)

定义：设X是样品空间Ω上的函数，如果其概率由一个密度函数f 决定，即

$$P(a < X \leq b) = \int_a^b f(u)du,$$

或更一般，如果对由若干有限或无限区间构成的集合A，

$$P(X \in A) = \int_A f(u)du,$$

则称X 为具有密度函数的**随机变量**（有时称为**连续的**随机变量，相对前面**离散的**随机变量）。

若$A = (-\infty, x)$，则

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f(u)du,$$

它是X 的**分布函数**。若f连续，则$F'(x) = f(x)$。

上面表明每个区间$[a, b]$，或有若干区间构成的集合A 都有概率，此类集合A称为**可测的**，属于σ**-代数（也成Borel集）**。随机变量X的**数学期望**为

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} uf(u)du.$$

事实上，可以这样理解: 设分割$a_i \le \xi_i \le a_{i+1}$

$$E(X) \sim \sum_i \xi_i P(a_i < X \le a_{i+1}) = \sum_i \xi_i \int_{a_i}^{a_{i+1}} f(u)du$$
$$\sim \sum_i \xi_i f(\xi_i)(a_{i+1} - a_i) \sim \int_{-\infty}^{\infty} uf(u)du.$$

更一般，随机变量$\varphi(X)$的**数学期望**为

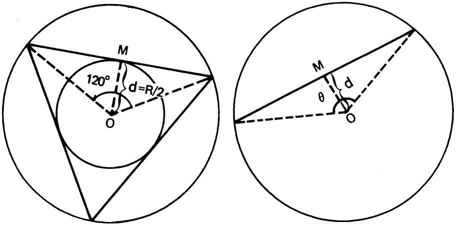
$$E(\varphi(X)) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(u)f(u)du.$$

具有密度的随机变量(不可数样品空间)

$$P(X = x) = \int_x^x f(u)du = 0.$$

与可数样本空间上的概率不同，那里该**概率一般为正**。

课后讨论：随机在圆内画一条弦，问它的长度超过圆内接等边三角形边长的概率是多少?（见钟开来书P. 101，有三个不同的答案，因为前提假设不同）



设样品空间Ω是可数或者不可数。下面给出**随机变量的一般定义**，首先引入σ-代数的概念。

Borel域(或σ-代数)：Ω的子集构成的非空集合$\mathcal{F}$称为一个Borel域，若满足:

- 若$A \in \mathcal{F}$，则$A^c \in \mathcal{F}$。
- 若$A_i \in \mathcal{F}, i \geq 1$，则$\cup_{i\geq 1} A_i \in \mathcal{F}$。

换言之，$\mathcal{F}$关于**补运算**和**可数并运算**是**封闭**的。

Borel域不惟一。

Borel域

Borel域的例子：

- $\mathcal{F} = \{\emptyset, \Omega\}$。
- $\mathcal{F} = \{\emptyset, A, A^c, \Omega\}$。这里集合$A \subset \Omega$ 是任何固定的非空集合。
- $\mathcal{F}$由Ω的所有子集构成。

第1，2情形Borel域太小，没用，而第3情形Borel域对**有限或者可数**的样品空间Ω是可以的，但对于**不可数**样品空间Ω，该集合$\mathcal{F}$**太大**，无法用（需在每个子集上赋予概率，无法办到)。

随机变量的一般定义

选择一个适当的**Borel域**$\mathcal{F}$，在其上定义一个**概率测度**P，则

$$(\Omega, \mathcal{F}, P)$$

称为一个**概率空间**，$\mathcal{F}$的每个元素称为**可测**。

随机变量的一般定义

随机变量的一般定义：Ω上的一个实值函数X称为随机变量，当且仅当对每个实数x，有

$$\{\omega : X(\omega) \le x\} \in \mathcal{F},$$

或说该集合是可测的（以后均用此定义！）。

以下顺序

$$\begin{array}{lll} \Omega \to \mathcal{F} \to & & P \\ & \searrow & \\ & & X(\omega). \end{array}$$

随机变量的一般定义

- **分布函数**$P(X \leq x)$对每个x有意义，因为集合$\{\omega : X(\omega) \leq x\}$可测，属于$P$的定义域。
- **概率**$P(a < X \leq b)$对每个区间$(a, b]$有意义：

$$P(a < X \leq b) = P(X \leq b) - P(X \leq a).$$

- 当Ω可数时，我们实际上取$\mathcal{F}$为Ω的**所有子集**构成的集合，故任意集合都是属于$\mathcal{F}$，是可测的，从而每个实值（或数值）函数都是随机变量!

二元分布函数

- **一元分布函数**：$F(x) = P(X \le x)$。
- **二元分布函数**：X, Y是Ω上的两个随机变量，

$$F(x,y) = P(X \le x, Y \le y).$$

- 若存在函数$f(u,v)$使得

$$F(x,y) = P(X \le x, Y \le y) = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(u,v)dudv,$$

则称函数$f(u,v)$为二元随机变量(X,Y)的**（联合）密度**，即满足

$$(1)\ f(u,v) \ge 0 \quad \text{对所有} u, v \in \mathbb{R},$$

$$(2)\ \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(u,v)dudv = 1.$$

二元分布函数$F(x,y)$的性质：

1. 关于每个分量是单调递增；
2. 关于每个分量是右连续的，左极限存在；
3. 对任何x,y，有$0 \le F(x,y) \le 1$;
4. $F(x,y)$具下列渐进性质：

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty,y\to\infty} F(x,y) &= 1, \\
\lim_{x\to-\infty} F(x,y) &= 0 \quad (\text{对所有} y), \\
\lim_{y\to-\infty} F(x,y) &= 0 \quad (\text{对所有} x).
\end{aligned}
$$

二元分布函数

- $P((X,Y)\in S)=\int\int_S f(u,v)dudv$。
- 数学期望$E(\varphi(X,Y))$

$$E(\varphi(X,Y))=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(u,v)f(u,v)dudv.$$

例：设随机变量X, Y的联合密度函数为

$$f(x,y)=\frac{1}{18},\quad 0<x<3, x^2<y<9.$$

分别求$E(X+Y)$和$E(XY)$。

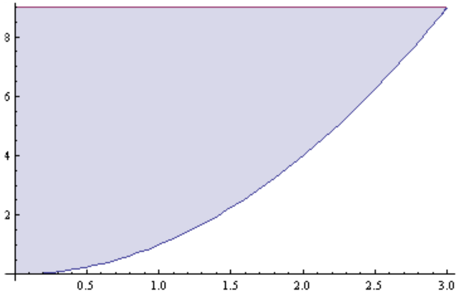


Figure: 区域$0<x<3, x^2<y<9$。**课堂讨论**：如此定义的函数$f(x,y)$是否一个密度函数？

解：事实上，

$$E(X+Y)=\int_0^3\int_{x^2}^9 (x+y)f(x,y)dydx$$
$$=\int_0^3\int_{x^2}^9 \frac{1}{18}(x+y)dydx=\frac{261}{40}.$$

课堂练习，求$E(XY)$?

答案： 事实上，

$$E(XY) = \int_0^3 \int_{x^2}^9 xyf(x,y)dydx = \int_0^3 \int_{x^2}^9 \frac{1}{18}xydydx = \frac{27}{4}.$$

条件概率

设$A, S \subset \Omega$，定义

$$P(A|S) := \frac{P(AS)}{P(S)} = \frac{P(A \cap S)}{P(S)},$$

称此值为A相对S的**条件概率**。

例：掷色子两次，已知总点数为7，问第1次点数为3的概率是多少?（猜一猜）

解：第1步。 两次结果有36种不同情况，而总点数为7的情况为

$$(1,6),(2,5),(3,4),(4,3),(5,2),(6,1)$$

共有6种不同情况。故"两次总点数为7" 这一事件发生的概率为$\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$。

第2步。 设X_1和X_2分别表示第1，2次的点数，令$A=\{X_1=3\}$，$S=\{X_1+X_2=7\}$，于是

$$\begin{aligned} P(A|S) &= P(X_1=3|X_1+X_2=7) \\ &= \frac{P(X_1=3,X_1+X_2=7)}{P(X_1+X_2=7)} \\ &= \frac{P(X_1=3,X_2=4)}{P(X_1+X_2=7)} = \frac{\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}}{\frac{1}{6}} = \frac{1}{6}. \end{aligned}$$

课堂练习。求：

$$(1).\quad P(X_1 = 5 | X_1 + X_2 = 7) = ?$$

$$(2).\quad P(X_1 = k | X_1 + X_2 = 6) = ? \quad (\text{任何} 1 \leq k \leq 5)$$

$$(3).\quad P(X_1 = k | X_1 + X_2 = 9) = ? \quad (\text{任何} 3 \leq k \leq 6)$$

课堂练习

答案：

$$(1).\quad P(X_1 = 5|X_1 + X_2 = 7) = 1/6.$$

$$(2).\quad P(X_1 = k|X_1 + X_2 = 6) = 1/5 \quad (1 \le k \le 5).$$

$$(3).\quad P(X_1 = k|X_1 + X_2 = 9) = 1/4 \quad (3 \le k \le 6).$$

例子

给定$X_1 = 4$，问$X_2 = 3$的概率是多少**?**（猜一猜）

想一想：第2次的点数是否受第1次影响?

例子

给定$X_1 = 4$，问$X_2 = 3$的概率是多少?（猜一猜）

想一想：第2次的点数不受第1次影响，故所求概率为1/6，这里用到两次事件的独立性。事实上，

$$
\begin{aligned}
P(X_2 = 3|X_1 = 4) &= \frac{P(X_2 = 3; X_1 = 4)}{P(X_1 = 4)} \\
&= \frac{1/36}{1/6} = \frac{1}{6}.
\end{aligned}
$$

课堂讨论题：求

$$P(X_1 + X_2 = 7|X_1 = 4) = ?$$

例子

例子：抛不均匀硬币，正面出现概率为p，X表示第**1**次出现正面所抛的次数**(**即正面出现的等待时间**)**。已知**3**次出现反面，问下两次有正面出现的概率多少**(within the next two trials**）？即下两次投币中，正面要出现的概率是多少**?**（猜一猜？）

问：X大于那个数？X在什么范围内？

例子

解：这是条件概率

$$P(X \le 5 | X \ge 4) = \frac{P(4 \le X \le 5)}{P(X \ge 4)}.$$

已知$P(X = n) = q^{n-1}p, \quad n \ge 1$，故有

$$\begin{aligned} P(X &\ge 4) = \sum_{n=4}^{\infty} q^{n-1}p = q^3, \\ P(4 &\le X \le 5) = P(X = 4) + P(X = 5) = q^3p + q^4p. \end{aligned}$$

故所求概率为

$$P(X \le 5 | X \ge 4) = \frac{q^3p + q^4p}{q^3} = p + qp.$$

表明不管前三次的投币情况，下两次有正面出现的概率（第一次出现正面，或者第一次出现反面、但第二次出现正面）。解毕。

例子

课堂练习题：抛不均匀硬币，正面出现概率为p, X表示第1次出现正面所抛的次数（即正面出现的等待时间）。计算

1. $P(1 \leq X \leq 2)$.
2. $P(X > n)$.
3. $P(X > n + m | X > m)$（条件概率！）.

答案

解：1. 事实上，

$$P(1 \le X \le 2) = P(X = 1) + P(X = 2) = p + qp.$$

2。利用$P(X = k) = q^{k-1}p(k \ge 1)$，我们得

$$\begin{aligned} P(X > n) &= \sum_{k=n+1}^{\infty} P(X = k) = \sum_{k=n+1}^{\infty} q^{k-1}p \\ &= p\left(q^n + q^{n+1} + \cdots\right) = pq^n \times \frac{1}{1-q} = q^n. \end{aligned}$$

答案

3。事实上，

$$
\begin{aligned}
P(X > n+m | X > m) &= \frac{P(X > n+m; X > m)}{P(X > m)} \\
&= \frac{P(X > n+m)}{P(X > m)} = \frac{q^{n+m}}{q^m} = q^n.
\end{aligned}
$$

相当于前面所抛的m次不管（不论m是多少），再重新开始，抛至少$n+1$次正面才出现的概率，即

$$P(X > n+m | X > m) = P(X > n) = q^n.$$

想一想，合理吗？马尔科夫性质!

基本公式

命题1： 对任意事件$A_1, A_2, \cdots, A_n$，有

$$P(A_1A_2\cdots A_n) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1A_2) \cdots P(A_n|A_1A_2\cdots A_{n-1}).$$

这里假设$P(A_1A_2\cdots A_{n-1}) > 0$。

证： 注意到

$$P(A_1) \geq P(A_1A_2) \geq P(A_1A_2A_3) \geq \cdots \geq P(A_1A_2\cdots A_{n-1}) > 0.$$

右边为

$$\frac{P(A_1)}{P(\Omega)} \cdot \frac{P(A_1A_2)}{P(A_1)} \cdot \cdots \cdot \frac{P(A_1A_2\cdots A_n)}{P(A_1A_2\cdots A_{n-1})} = P(A_1A_2\cdots A_n).$$

证毕。

命题2： 设$\Omega = \sum_n A_n$是样品空间不相交的分割，则对任意B，

$$P(B) = \sum_n P(A_n)P(B|A_n).$$

解：

$$B = B \cap \Omega = B \cap \left(\sum_n A_n\right) = \sum_n A_n B.$$

所以

$$P(B) = P\left(\sum_n A_n B\right) = \sum_n P(A_n B) = \sum_n P(A_n)P(B|A_n).$$

注意：若$P(A_n) = 0$，则$P(A_n B) = P(A_n)P(B|A_n) = 0$，上式一样成立。

证毕。

命题3（Bayes 定理, 1763）： 设命题2条件成立，若$P(B) > 0$，则

$$P(A_n|B) = \frac{P(A_n)P(B|A_n)}{\sum_k P(A_k)P(B|A_k)}.$$

解：注意$P(B)P(A_n|B) = P(A_n)P(B|A_n)$，所以

$$P(A_n|B) = \frac{P(A_n)P(B|A_n)}{P(B)} = \frac{P(A_n)P(B|A_n)}{\sum_k P(A_k)P(B|A_k)}.$$

证毕。

Bayes 定理的意义：

- 设B是一起凶杀案，$\{A_n\}$是诸多凶手，Bayes定理表明凶手A_n犯罪的概率公式。
- 设B是一次地震，$\{A_n\}$是诸多原因，Bayes定理表明引起地震发生原因A_n的概率公式。
- 设B是癌症，$\{A_n\}$是诸多原因，Bayes定理表明引起癌症原因A_n的概率公式。
- $\cdots$ 等等。

问：若$P(A)=0$，则$A=\emptyset$?

答案：不一定！ 例如，设样本空间Ω如下:

$$\Omega = \{1, 2, 3\}.$$

定义P如下:

$$P(\{1\}) = 0,\ P(\{2\}) = \frac{1}{3},\ P(\{3\}) = \frac{2}{3},$$
$$P(A) = \sum_{\omega \in A} P(\{\omega\}),\ \forall A \subset \Omega,$$

则如此定义的集函数P是一个概率（为什么？），但$P(\{1\}) = 0$。

钟书第70页第2题：**Three kinds of shirts are on sale. (a) If two men buy one shirt each, how many possibilities are there? (b) If two shirts are sold, how many possibilities are there?**

三种衬衫正在出售。（a）如果两人每人买一件衬衫，可能性有多少？（b）如果两件衬衫都卖了，可能性有多少？

注意：情形(b)强调两件衬衫被卖，与"人"无关，"两个人"这一词仅出现在第一问中，第二问中没有出现任何人。

（**a**）如果两人每人买一件衬衫，可能性有多少？

答案：3^2。**提示：**此为多重选择，每人有3种选择，故2人共有3×3种可能。

（**b**）如果两件衬衫都卖了，可能性有多少？

答案：$\binom{2+3-1}{2}$。**提示：**化为挡板问题，其中有2个$\surd$（表示卖掉的两件衬衫），有$3-1=2$ 个"挡板"（表示3种衬衫可选择，但挡板数少一个，因为要去掉最前和最后两个挡板）。例如：

1	2	3
$\surd\surd$		

表示第一种衬衫卖掉了2件，其它种衬衫一个也没有卖掉。或者简写为：$\surd\surd||$。因此，答案为$\binom{2+3-1}{2}$。

钟书第71页第12题：**There are two locks on the door and the keys are among the six different ones you carry in your pocket. In a hurry you dropped one somewhere. What is the probability that you can still open the door? What is the probability that the first two keys you try will open the door?**

门上有2把锁，要用你口袋中的6把不同钥匙中的2把才能打开，但匆忙间，你丢掉了1把钥匙。问：仍然可以打开门的概率是多少？你试一次就能打开门的概率又是多少？

（a）仍然可以打开门的概率是多少？

答案：$\frac{2}{3}$。提示：6把钥匙丢掉1把，共有6种情况。仍能打开门，只能丢掉其中不能打开门的钥匙，共有4种可能。故所求概率为$\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$。

（b）你试一次就能打开门的概率又是多少？

解：分两种情况。

- **2把钥匙有顺序。** 已知掉了1把（不能打开门的）钥匙，概率为$\frac{4}{6}$。剩下5把钥匙，任意取2把，讲顺序，有5×4种可能。取得的2把钥匙恰好能打开锁，只有1种可能。故所求概率为$\frac{4}{6}\cdot\frac{1}{5\times 4}=\frac{4!}{6!}$。
- **2把钥匙无顺序。** 答案：$\frac{2\times 4!}{6!}=\frac{4}{6}\cdot\frac{1}{\binom{5}{2}}$，因为从5把钥匙中任意取2把，不讲顺序，有$\binom{5}{2}$种可能。

P. 109，第1题：$X + X = 2X$??

解法1 代数里，我们知道$x + x = 2x$。设X表示掷一个色子所出现的点数，则X可能的值是$\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$中的一个，$2X$也是一个随机变量，其可能的值是$\{2, 4, 6, 8, 10, 12\}$ 中的一个。让T表示掷两次色子所出现的点数之和，则T的可能值在下列集合中：

$$\{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}.$$

在某种意义上T可理解为$X + X$。因此，$X + X \neq 2X$。事实上，可理解随机变量$X + X$为$X(\omega_1) + X(\omega_2)$，**与函数的加法不一样!**

解法2（本书定义） $X + Y$定义为：$\omega \mapsto X(\omega) + Y(\omega)$，因此$X + X = 2X$。

P. 109，第4题：求随机变量XY的概率分布？

答： 已知$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5\}$，$\omega_i$为实数，随机变量$X$满足

$$\begin{aligned} P(X &= 1) = P(X = 2) = \frac{1}{10}, P(X = 3) = \frac{1}{5}, \\ P(X &= 4) = \frac{1}{5}, P(X = 5) = \frac{2}{5}, \end{aligned}$$

同时随机变量Y满足

$$P(Y = \sqrt{2}) = \frac{1}{5}, P(Y = \sqrt{3}) = \frac{3}{10}, P(Y = \pi) = \frac{1}{2}.$$

但我们**不知道**$X(\omega_i) =?$ $Y(\omega_i) =?$ **需要你去定义**，一旦你给出了定义，就可以求出$Z := XY$在每个点ω_i的值，以及Z在这些值的概率了。**钟书给**出$X(\omega_j) = j, 1 \leq j \leq 5$，以及$Y(\omega_1) = Y(\omega_4) = \sqrt{3}$，$Y(\omega_2) = Y(\omega_5) = \pi$，$Y(\omega_3) = \sqrt{2}$，此时$Z = XY$如何**取值**？**概率分布**？

注意到

$$P(X=1)=P(\{\omega: X(\omega)=1\})=P(\{\omega_1\})=P(\omega_1)=\frac{1}{10}.$$

同理，

$$P(\omega_2)=\frac{1}{10}, P(\omega_3)=P(\omega_4)=\frac{1}{5}, P(\omega_5)=\frac{2}{5}.$$

此时随机变量Y的赋值需小心，可取$Y(\omega_1)=Y(\omega_4)=\sqrt{3}$, $Y(\omega_2)=Y(\omega_5)=\pi$, $Y(\omega_3)=\sqrt{2}$, 从而满足题目条件，即满足

$$\begin{aligned}
P(Y &= \sqrt{2})=P(\omega_3)=\frac{1}{5},\\
P(Y &= \sqrt{3})=P(\{\omega_1,\omega_4\})=\frac{1}{10}+\frac{1}{5}=\frac{3}{10},\\
P(Y &= \pi)=P(\{\omega_2,\omega_5\})=\frac{1}{10}+\frac{2}{5}=\frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

作业讲解, P. 109，第4题

随机变量XY的 **取值**如下：

$\sqrt{3}$	2π	$3\sqrt{2}$	$4\sqrt{3}$	5π

随机变量XY的**概率**分布如下：

$$
\begin{aligned}
P(XY &= \sqrt{3}) = P(\{\omega : X(\omega)Y(\omega) = \sqrt{3}\}) = P(\omega_1) = \frac{1}{10},\\
P(XY &= 2\pi) = P(\{\omega : X(\omega)Y(\omega) = 2\pi\}) = P(\omega 2) = \frac{1}{10},\\
P(XY &= 3\sqrt{2}) = P(XY = 4\sqrt{3}) = \frac{1}{5},\\
P(XY &= 5\pi) = \frac{2}{5}.
\end{aligned}
$$

解毕。

解法二：随机变量Y的赋值也可不同，如$Y(\omega_1) = Y(\omega_5) = \pi$, $Y(\omega_2) = Y(\omega_3) = \sqrt{3}$, $Y(\omega_4) = \sqrt{2}$, 从而满足题目条件，即满足

$$\begin{aligned}
P(Y &= \sqrt{2}) = P(\omega_4) = \frac{1}{5}, \\
P(Y &= \sqrt{3}) = P(\{\omega_2, \omega_3\}) = \frac{1}{10} + \frac{1}{5} = \frac{3}{10}, \\
P(Y &= \pi) = P(\{\omega_1, \omega_5\}) = \frac{1}{10} + \frac{2}{5} = \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

随机变量XY的概率分布如下：

$$\begin{aligned}
P(XY &= \pi) = P(XY = 2\sqrt{3}) = \frac{1}{10}, \\
P(XY &= 3\sqrt{3}) = P(4\sqrt{2}) = \frac{1}{5}, \\
P(XY &= 5\pi) = \frac{2}{5}.
\end{aligned}$$

解毕。

作业

第4周作业(钟开来书)：

P. 111-113：第16，19，22，24，31题。

P. 157-158：第2，3，4，5，6，7题。

作业：请在作业第1页左上角写上醒目**学号、姓名**。

预习内容：随机变量的独立、例子。