概率論

目錄

目錄
概率論習題 2
概率論習題課 6
2009.4概率論期中真題及答案 9
概率論知識點總结 12
04－05學年概率論試題及答案 17
《概率論》期末考試試題 23
概率論與数理统計試題(A) 25
《概率論與数理统計》試卷(B) 27
2003.12概率論真題及答案 30
2004.1概率論真題 31
2004.6概率論真題及答案 33
2005.1概率論真題及答案 36
2007.1概率論真題及答案 41
2007.6概率論真題及答案 48
2009.6概率論真題 52
2010.1概率論真題及答案 54
2011.1概率論真題 63

汽車工程系學習部

榮譽出品

清華大學

习题1. 甲、乙两射手轮流循环对同一目标进行~~设计~~，射击，先射中者胜，设他们命中概率分别为 P_1 和 P_2，求甲先射时，甲、乙获胜的概率.

设甲获胜概率为 $P_甲$，

$$P_甲 = P_1 + (1-P_1)(1-P_2)P_1 + (1-P_1)^2(1-P_2)^2P_1 + \cdots$$
$$= P_1 \cdot \frac{1}{1-(1-P_1)(1-P_2)}$$
$$= \frac{P_1}{-P_1P_2+P_1+P_2}$$
$$P_乙 = 1 - P_甲 = \frac{P_2-P_1P_2}{P_1+P_2-P_1P_2}$$

Polya 模型

从有 r 个红球、b 个黑球的袋中随机取一球，记下颜色。放回，并加入 c 个同色球，如此取 n 次，求第 n 次取出红球的概率.

设 $R_n = \{第n次取出红球\}$; $B_n = \{第n次取出黑球\}$

由全概率公式，

$$P(R_2) = P(R_1)P(R_2|R_1) + P(B_1)P(R_2|B_1)$$
$$= \frac{r}{r+b}\cdot\frac{r+c}{r+b+c} + \frac{b}{r+b}\cdot\frac{r}{r+b+c}$$
$$= \frac{r}{r+b}$$
$$\therefore \quad P(R_2) = P(R_1) \quad \Longrightarrow \quad P(R_n) = P(R_1) = \frac{r}{r+b}$$

第　　页

清華大學

应用： $C = 0$，还原抽球

$C = -1$，不还原抽球。

例题 n个袋中都装有 $r+b$ 只球，红球 r 只，从第1袋中随机取一球放入第2袋，再从第2袋随机取一1球放入第3袋，如此继续。求第n次取红球的概率？

同 Polya 模型 $C = 0$.

$$P(R_n) = P(R_1) = \frac{r}{r+b}$$

"递推法"。

例1.（两端带吸收壁的随机游动） 它在第n点上（$0 < n < a+b$）

一个质点在 0 到 $a+b$ 上随机游动，有 q 的概率下一次到 $n+1$，而

有 p 的概率下一次到 $n-1$，求质点从 a 点出发，最

当质点到 0 点和 $a+b$ 点时，停止移动，

后到达 $(a+b)$ 点的概率？ $(p+q=1)$

解： 令 P_n 表示第n点出发，最后到达 $(a+b)$ 点的概率

$$\begin{cases} P_n = p \cdot P_{n-1} + q \cdot P_{n+1} & (0 < n < a+b) \\ P_0 = 0 \\ P_{a+b} = 1 \end{cases}$$

清華大學

$$\Rightarrow \quad p\cdot(P_n-P_{n-1}) = q\cdot(P_{n+1}-P_n)$$

令 $P_{n+1}-P_n = a_n$

$$a_n = \frac{p}{q}\cdot a_{n-1}$$

而 $a_0+\cdots+a_{a+b-1} = P_{a+b}-P_0 = 1$

$$\therefore \quad a_0\cdot\left(1+\frac{p}{q}+\cdots+\left(\frac{p}{q}\right)^{a+b-1}\right) = 1$$

$$a_0\cdot\frac{1-\left(\frac{p}{q}\right)^{a+b}}{1-\left(\frac{p}{q}\right)} = 1 \Rightarrow \cancel{a_0 = \frac{1-\left(\frac{p}{q}\right)^{a+b}}{1-\frac{p}{q}}}$$

$$a_0 = \frac{1-\left(\frac{p}{q}\right)}{1-\left(\frac{p}{q}\right)^{a+b}}$$

而 $P_n = \sum_{i=0}^{n-1} a_i + P_0$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} a_i$$

$$= \left[\sum_{i=0}^{n-1}\left(\frac{p}{q}\right)^i\right]\cdot a_0$$

$$= \frac{1-\left(\frac{p}{q}\right)^n}{1-\left(\frac{p}{q}\right)^{a+b}}$$

$$\therefore \quad P_a = \frac{1-\left(\frac{p}{q}\right)^a}{1-\left(\frac{p}{q}\right)^{a+b}}$$

例2、甲、乙设计比赛，每轮各射一次，胜者得1分，比赛直至一人比对方多2分时立即结束，多2分为胜者，设他们命中概率分别为 P_1 和 P_2，求甲获胜概率

可看作 $\underset{-2\quad -1\quad 0\quad 1\quad 2}{\overline{\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad}}$ 质点在 -2 到 2 上的随机游动，

甲得1分概率 $P = P_1(1-P_2)$

清華大學

乙得1分概率 $q = P_2(1-P_1)$

甲，乙不得分 $m = P_1P_2 + (1-P_1)(1-P_2) = 1-p-q$

令 P_n 为第 n点处出发，最终到达 端点 2 的概率

$(-2 < n < 2)$

$$\begin{cases} P_n = p \cdot P_{n+1} + q \cdot P_{n-1} + m \cdot P_n \\ P_{-2} = 0 \\ P_2 = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad (1-m)P_n = p \cdot P_{n+1} + q \cdot P_{n-1}$$

$$(p+q)P_n = p \cdot P_{n+1} + q \cdot P_{n-1}$$

$$P_n = \frac{p}{p+q} \cdot P_{n+1} + \frac{q}{p+q} \cdot P_{n-1}$$

则情况变得与前面相同

$$P_0 = \frac{1-\left(\frac{p}{q}\right)^2}{1-\left(\frac{p}{q}\right)^4} \qquad \frac{p}{q} = \frac{P_1(1-P_2)}{P_2(1-P_1)}$$

第　　页

第三次习题课习题答案

第一题：设有一笔资金，总量记为1，如今要投资甲、乙两种证券。若将资金x_1投资于甲，余下的$1-x_1=x_2$投资于乙，于是(x_1,x_2)就形成了一个投资组合。记X为投资甲的收益率，Y为投资乙证券的收益率，它们都为随机变量。若X和Y的期望（代表平均收益）分别为μ_1和μ_2，方差（代表风险）分别为σ_1^2和σ_2^2，X, Y之间的相关系数为$\rho\le 0$，试求该投资组合的平均收益与风险（方差），并求使得投资风险最小的x_1.

解：记$Z=x_1X+(1-x_1)Y$，则

$$E(Z)=x_1E(X)+(1-x_1)E(Y)=x_1(\mu_1-\mu_2)+\mu_2,$$

$$Var(Z)=x_1^2Var(X)+2x_1(1-x_1)cov(X,Y)+(1-x_1)^2Var(Y)=x_1^2\sigma_1^2+(1-x_1)^2\sigma_2^2+2x_1(1-x_1)\rho\sigma_1\sigma_2.$$

为求最小风险组合，令$\frac{dVar(Z)}{dx_1}=0$, 得$x_1^*=\frac{\sigma_2^2-\rho\sigma_1\sigma_2}{\sigma_2^2+\sigma_1^2-2\rho\sigma_1\sigma_2}$时，组合风险最小. **第二题**：设随机变量$X_1,X_2,\cdots,X_n$相互独立，且都服从$(0,\theta)$上的均匀分布，记

$$Y=\max\{X_1,X_2,\cdots,X_n\},\qquad Z=\min\{X_1,X_2,\cdots,X_n\}.$$

试求$E(Y)$和$E(Z)$.

解：当$0<t<\theta$时，Y和Z的分布函数分别为

$$F_Y(y)=P(Y\le y)=P(X_1\le y,X_2\le y,\cdots,X_n\le y)=\prod_{i=1}^n P(X_i\le y)=(\tfrac{y}{\theta})^n.$$

$$F_Z(z)=1-P(Y>z)=1-P(X_1>z,X_2>z,\cdots,X_n>z)=1-\prod_{i=1}^n P(X_i>z)=1-(1-\tfrac{z}{\theta})^n$$

所以Y和Z的密度函数分别为

$$p_Y(y)=n(\frac{y}{\theta})^{n-1}\frac{1}{\theta}I_{\{0<y<\theta\}},\ p_Z(z)=n(1-\frac{z}{\theta})^{n-1}\frac{1}{\theta}I_{\{0<z<\theta\}}.$$

所以

$$E(Y)=\frac{n}{\theta^n}\int_0^\theta y^n dy=\frac{n\theta}{n+1};\ E(Z)=\frac{n}{\theta^n}\int_0^\theta z(\theta-z)^{n-1}dz=\frac{\theta}{n+1}.$$

第三题：设二维随机变量(X,Y)服从单位圆内的均匀分布，其联合密度函数为

$$p(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{\pi},\ x^2+y^2<1\\ 0,\ x^2+y^2\ge 1.\end{cases}\tag{1}$$

试证X与Y不独立也不相关。

解：先求边际密度函数$p_X(x)$和$p_Y(y)$.

$$p_X(x)=\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\tfrac{1}{\pi}dy=\tfrac{2}{\pi}\sqrt{1-x^2},\ -1<x<1.$$
$$p_Y(y)=\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}}\tfrac{1}{\pi}dx=\tfrac{2}{\pi}\sqrt{1-y^2},\ -1<y<1.$$

所以由$p(x,y) \neq p_X(x)p_Y(y)$，知X与Y不独立. 又因为$p_X(x)$和$p_Y(y)$在对称区间上是偶函数，故$E(X)=E(Y)=0$，从而

$$Cov(X,Y)=E(XY)=\frac{1}{\pi}\int_1^{-1}\int_{\sqrt{1-x^2}}^{-\sqrt{1-x^2}} xydydx=0,$$

所以X与Y不相关。

第四题：设$X_1,X_2,\cdots$为一列独立同分布的随机变量，随机变量N只取正整数，且与$\{X_n\}$独立，证明

$$E\left(\sum_{i=1}^{N}X_i\right)=E(X_1)E(N).$$

证明：

$$\begin{aligned}
E\left(\sum_{i=1}^{N}X_i\right) &= E\left(E(\sum_{i=1}^{N}X_i)\mid N\right)\\
&= \sum_{n=1}^{+\infty}E(\sum_{i=1}^{N}X_i)\mid N=n)P(N=n)\\
&= \sum_{n=1}^{+\infty}E(\sum_{i=1}^{n}X_i))P(N=n)\\
&= \sum_{n=1}^{+\infty}nE(X_1)P(N=n)=E(X_1)E(N). \qquad (2)
\end{aligned}$$

第五题：抛一颗骰子直到所有点数出现为止，求所需投掷次数Y的数学期望。

解：引入随机变量$X_i, i=1,2,\cdots,6$，如下：

设X_1：抛第一次筛子所得到的点数；X_2：第一个点数得到后，首次得到与第一个不同的点数所需要的投掷次数；X_3：第一、第二两点得到后，首次得到与前两个不同的点数所需要的投掷次数；X_4、X_5、X_6的定义依此类推，则所需要的次数为$X=X_1+X_2+X_3+X_4+X_5+X_6$. 易知$E(X_1)=1$，$X_2$服从参数$p=\frac{5}{6}$的几何分布，分布律为

$$P(X_2=n)=(\frac{1}{6})^{n-1}\frac{5}{6},\ n=1,2,3,\cdots$$

X_3服从参数$p=\frac{4}{6}$的几何分布，分布律为

$$P(X_3=n)=(\frac{2}{6})^{n-1}\frac{4}{6},\ n=1,2,3,\cdots$$

X_4服从参数$p=\frac{3}{6}$的几何分布，分布律为

$$P(X_4=n)=(\frac{3}{6})^{n-1}\frac{3}{6},\ n=1,2,3,\cdots$$

X_5服从参数$p=\frac{3}{6}$的几何分布，分布律为

$$P(X_4=n)=(\frac{4}{6})^{n-1}\frac{2}{6},\ n=1,2,3,\cdots$$

X_6服从参数$p=\frac{3}{6}$的几何分布，分布律为

$$P(X_4=n)=(\frac{5}{6})^{n-1}\frac{1}{6},\ n=1,2,3,\cdots$$

故

$$E(X)=\sum_{i=1}^{6}EX_i=1+\sum_{i=2}^{6}EX_i=1+\sum_{i=2}^{6}\frac{6}{7-i}=14.7$$

第六题：设(X,Y)的概率密度函数是$f(x,y)=\frac{1}{2}[\phi_1(x,y)+\phi_2(x,y)]$，其中$\phi_1$，$\phi_2$均为二维正态密度函数，且它们对应的二维随机变量的相关系数分别为$\frac{1}{3}$和$-\frac{1}{3}$，它们的边际分布均为$N(0,1)$.

（1）求X和Y的密度函数；

解：

$$\begin{aligned}f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy &= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\phi_1(x,y)dy+\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\phi_2(x,y)dy\\ &= \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}+\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}\end{aligned}$$

同理，$f_Y(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y^2}{2}}$.即$X,Y$均服从$N(0,1)$.

（2）求X和Y的相关系数；

解：

$$\begin{aligned}E(XY)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}xyf(x,y)dxdy &= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}xy\phi_1(x,y)dxdy+\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}xy\phi_2(x,y)dx\\ &= \frac{1}{2}E_{\phi_1}(XY)+\frac{1}{2}E_{\phi_1}(XY).\end{aligned}$$

因为ϕ_1对应的随机变量之间的相关系数为$\frac{1}{3}$，且边缘分布皆为$N(0,1)$，所以

$$E_{\phi_1}(XY)=\frac{1}{3}\sqrt{Var_{\phi_1}(X)}\sqrt{Var_{\phi_1}(Y)}+E_{\phi_1}(X)E_{\phi_1}(Y)=\frac{1}{3}\cdot1\cdot1+0\cdot0=\frac{1}{3}$$

同理，$E_{\phi_2}(XY)=-\frac{1}{3}$.所以$E(XY)=0$，从而$Cov(X,Y)=E(XY)-EX\cdot EY=0$，故$X,Y$不相关。

（3）X与Y是否相互独立？

解：因为

$$\phi_1(x,y)=\frac{3}{4\pi\sqrt{2}}e^{-\frac{9}{16}(x^2-\frac{2}{3}xy+y^2)},\ \phi_1(x,y)=\frac{3}{4\pi\sqrt{2}}e^{-\frac{9}{16}(x^2+\frac{2}{3}xy+y^2)}$$

则

$$f(x,y)=\frac{1}{2}(\phi_1+\phi_2)=\phi_1(x,y)=\frac{3}{8\pi\sqrt{2}}(e^{-\frac{9}{16}(x^2-\frac{2}{3}xy+y^2)}+e^{-\frac{9}{16}(x^2+\frac{2}{3}xy+y^2)})$$

而

$$f_X(x)f_Y(y)=\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}\neq f(x,y).$$

所以X与Y不独立。

概率论与数理统计期中考试试题

考试时间：2009年4月18日 9：50—11：50

姓名________ 学号200 0________ 班级__________

说明：选择题答案写在本页上．其他题目在答题本上解答（写清题号及解题过程）。考试结束时．把试题纸对折后插入答题本内由监考教师统一收回。

一、单项选择题（18分，每题2分），请将正确答案对应的字母填在指定横线处。

1. 任何一个事件和它的对立事件之间______________。

(A) 相容 (B) 互不相容 (C) 独立 (D) 不独立。

2. 随机变量 X 的分布律：$P\{X=i\}=2(1-2a)a^i$，$i=0,1,2,\cdots$。则常数 $a=$_______。

(A) 3 (B) 2 (C) $\frac{1}{2}$ (D) $\frac{1}{3}$

3. 设随机变量 X 服从标准正态分布，则随机变量 $Y=2|X|$ 的概率密度函数是_____。

(A) $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y^2}{8}}\ (y>0)$ (B) $\sqrt{\frac{2}{\pi}}e^{-\frac{|y|}{4}}\ (y\in R)$

(C) $\sqrt{\frac{2}{\pi}}e^{-\frac{y^2}{8}}\ (y>0)$ (D) $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{|y|}{4}}\ (y>0)$

4. 事件A, B相互独立，且 $P(\overline{A}\,\overline{B})=\frac{2}{9}$，$P(\overline{A}\,\overline{B})=P(AB)$，$P(A)\ge P(B)$，则 $P(A)=$__。

(A) $\frac{1}{2}$ (B) $\frac{2}{5}$ (C) $\frac{4}{9}$ (D) $\frac{2}{3}$

5. 如果 $0<\mathrm{Var}(X)<+\infty$，则 $\mathrm{Var}\left(\frac{X-E(X)}{\mathrm{Var}(X)}\right)=$______________。

(A) 1 (B) 0 (C) $\frac{1}{Var(X)}$ (D) $Var(X)$

6. 随机变量 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，则 $E(|X-\mu|)=$____________。

(A) 0 (B) $\sigma\sqrt{\frac{2}{\pi}}$ (C) σ (D) σ^2

7. Laplace 分布的密度函数为 $p(x)=\frac{1}{2}e^{-|x|}$, $x\in R$，其期望等于____________。

(A) 0 (B) 1 (C) e (D) 不存在

8. 假设连续型随机变量 X,Y 在 $0<x<1, 0<y<1$ 上满足 $p_{Y|X}(y|x)=\frac{2y+4x}{1+4x}$，$p_X(x)=\frac{1+4x}{3}$，则 $0<x<1, 0<y<1$ 时，$p_{X|Y}(x|Y=y)=$______________。

(A) $\frac{y+2x}{y+1}$ (B) 1 (C) $\frac{y+x}{y+1}$ (D) $\frac{y+4x}{y+2}$

9. 在$[a,b]$区间上取值的随机变量X，其方差最大可以达到______________。

(A) b^2-a^2 (B) $\left(\frac{b-a}{2}\right)^2$ (C) $(b-a)^2$ (D) $\frac{b^2-a^2}{2}$

二、(12分) 射击室里有10支步枪，其中2支经过校准，用其射击命中率为0.8，用其他8支射击的命中率为0.2。

(1) 今从室内任取一步枪对目标射击恰好命中，求使用的枪为已校准的概率；

(2) 任取一支步枪，用这支枪连续射击10次，恰好命中5发的概率是多少？

三、(12分) (1) 一颗6面均匀的色子，各面分别对应1-6点，反复投掷直到首次连续出现两个6点，求投掷次数的期望；(2) 设甲、乙两人进行一场比赛，由公正的第三方投掷色子，直至首次相继出现“6点6点”或“1点6点”停止，如果以“6点6点”结束，则甲胜，以“1点6点”结束为乙胜，请问甲、乙的获胜概率。

四、(12分) 如果X服从几何分布$Ge(p)$，Y服从指数分布$Exp(\lambda)$，请证明：

(1) 对任意正整数m和n，有$P(X>n+m|X>m)=P(X>n)$；

(2) 对任意$s>0$和$t>0$，有$P(Y>s+t|Y>s)=P(Y>t)$。

几何分布与指数分布的上述性质称为**“无记忆性”**，请简单解释无记忆性的直观含义。

五、(10分) (1) X为一只取正整数值的离散型随机变量，证明$E(X)=\sum_{k=1}^{\infty}P(X\ge k)$；

(2) 利用此公式计算几何分布$Ge(p)$的期望。

六、(12分) 设随机变量X,Y独立同分布，且X的概率分布为

X	1	2
P	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$

$U=\max\{X,Y\}$，$V=\min\{X,Y\}$。

(1) 求(U,V)的联合概率分布；(2) 求U,V的期望和方差。

七、(18分) 二元随机变量(X,Y)的联合密度函数$p(x,y)=\begin{cases}1, |y|<x, 0<x<1\\ 0, 其他\end{cases}$，求

(1) $p_{Y|X}(y|x)$，$p_{X|Y}(x|y)$；(2) $E(Y|X)$，$E(X|Y)$；

(3) $P\left(|Y|<\frac{1}{3}\middle|X=\frac{1}{2}\right)$，$P\left(X<\frac{1}{3}\middle|Y=-\frac{1}{2}\right)$.

八、(6分) 冒泡排序法的基本思想是交换所有的相邻逆序，直到没有逆序为止。假设冒泡排序算法的输入是n个不同数的一个随机排序，即等可能地为n个不同数的n！种排列中的任意一个，求冒泡法需要交换逆序的次数的期望值。

$p(n) = \frac{1}{n}\times 1 + \frac{n-1}{n}$

$\frac{n-1}{n}\times\frac{1}{n-1}$

$\frac{1}{n}\cdot\frac{(1+n)n}{2}$

$a_n = \frac{1}{n}\times 1 + \frac{n-1}{n}\cdot a_{n-1}$

$a_n - \frac{1}{n-1} = \frac{n-1}{n}a_{n-1} - \frac{1}{n(n-1)}$

$\frac{n-1}{n}\left(a_{n-1} - \frac{1}{(n-1)^2}\right)$

期中样题参考答案

$n a_n - n = (n-1)a_{n-1} + 1 - n$

一、1.B; 2.D; 3.A; 4.D; 5.C; 6.B; 7.A; 8.A; 9.B

二、(1) 0.5; (2) $C_10^5 \times 0.16^5 \approx 0.0264$

$n(a_n - 1) = (n-1)(a_{n-1} - 1)$

三、(1) 42, (2) 7/12

$= 2(a_2 - 1)$ $\quad \frac{1}{2}\times 1 + \frac{1}{2}\times 2 = 1.5$

$= 2\times 0.5$

四、五、略

六、(1)

$a_n = 1 + \frac{1}{n} = \frac{n+1}{n}$

$U\setminus V$	1	2
1	4/9	0
2	4/9	1/9

(2) E(U)=14/9; E(V)=10/9; Var(U)=20/81; Var(V)=8/81.

$-e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}$

七、(1) $p_{Y|X}(y|x) = \frac{1}{2x} I_{|y|<x, 0<x<1}$; $p_{X|Y}(x|y) = \frac{1}{1-|y|} I_{|y|<x, 0<x<1}$

(2) $\dot{E}(Y|X) = 0\ (0 < x < 1)$, $E(X|Y) = \frac{1+|y|}{2}\ (|y| < 1)$

(3) $\frac{2}{3}$, 0

$x = \lambda_1 + \lambda_2$

$y = \lambda_2$

$\lambda_1 = x - y$

$\lambda_2 = y$

八、$\frac{C_n^2}{2}$，利用对称性。

概率论部分

一、 随机现象的数学描述和概率论的基本思想

1. 理解描述随机现象的各种概念（随机试验、样本、样本空间、事件及随机变量）以及这些概念之间的相互关系
2. 掌握事件关系和事件的基本运算，了解单调事件列的极限事件。【一般事件列的上下极限不作为考试要求。事件域（或σ-代数）不作为考试要求。】
3. 掌握概率的基本性质，了解概率的连续性。
4. 理解条件概率的直观含义和数学定义，掌握条件概率在概率计算中的应用（乘法公式、全概率公式、Bayes 公式）。
5. 理解事件的独立性的定义和有关性质。
6. 理解古典概型、几何概型的基本原理。【复杂的排列组合技巧不做要求】

二、 随机变量的概率分布

1. 理解随机变量及其概率分布函数的定义，理解随机变量概率分布函数的性质【分布函数性质证明不作为考试要求】但性质要知道，掌握概率分布函数的计算。
2. 理解离散型随机变量、连续型随机变量的定义，掌握概率分布列、概率密度函数及概率分布函数的关系，掌握有关的计算。都要掌握
3. 理解多维随机变量的定义，理解联合概率分布（分布函数、分布列、概率密度）与边缘分布（分布函数、分布列、概率密度），掌握有关计算，计算一定要会，肯定会考。
4. 理解随机变量的独立性的定义和性质，知道判断独立和不独立的方法，肯定也会考。方法有：概率分布列、概率密度、特征函数（特征函数不考）
5. 掌握计算随机变量的函数的概率分布的方法：把单随机变量和随机向量一起复习
   a) 利用概率分布函数；

b) 利用函数关系，直接计算概率密度的方法（Jacobi）：一对一（可逆变换）情形；多对一（分段可逆变换）情形。光滑双射密度公式，算起来很快

c) 独立和的概率分布。卷积，要会用

d) 最大值与最小值的概率分布。【其他次序统计量的概率分布不作为考试要求】。考过最大值与最小值的联合分布，想想怎么算

6. 理解条件概率分布（分布函数、分布列、概率密度）的定义和相关计算。【随机和不作为考试要求】 会用到三大公式的密度表示

三、 **随机变量的数字特征**

1. 单个随机变量的数字特征

a) 数学期望和方差：

i. 理解数学期望的定义，理解数学期望的存在性，掌握数学期望的性质和计算。

ii. 理解方差的定义和直观含义，掌握方差的性质和计算。

iii. 理解如何把随机变量进行标准化改造（期望=0，方差=1）。标准化在统计里用的多

iv. 理解期望、方差的述性质。比如期望的线性，独立条件下期望和方差的计算公式，方差的勾股定理

b) 原点矩和中心矩。统计里用的多，矩估计

c) 分位数和中位数：理解分布的（下侧）分位数的定义，以及它们在概率分布函数和概率密度函数图像上的直观含义。默认下侧分位数

2. 涉及多个随机变量的数字特征。比较复杂，但需要掌握

a) 协方差：理解协方差的定义和性质（对称、双线性、与独立性的关系（独立退出系数为 0，但反过来退不出，只能退出不想管。除了正态和高斯，高斯不考）），掌握协方差的计算

b) 相关系数：理解相关系数的定义和性质，掌握有关计算。正确理解不相关和独立的联系与区别。知道线性相关系数为 1 或-1 时的含义。把协方差除标准差

c) 条件数学期望：理解定义和有关计算，掌握全（重）期望公式

d) 【最小二乘法和最佳预测不作为考试要求】

四、 常见的概率分布

1. 离散型分布六大分布要立刻吧概率分布列写出来！！！期望和方差也要快点写出来。

a) Bernoulli 分布、二项分布：分布列，两个分布之间的关系，期望、方差。

b) 几何分布：分布列，期望、方差，无记忆性。

c) Poisson 分布【Poisson 过程（又称 Poisson 流）不作为考试要求，比如保险理赔过程】：分布列，期望、方差，Poisson 定理（特殊二项分布的 Poisson 近似，需要知道）【注】拉普拉斯的标准化，泊松是正态近似，具体用哪种近似根据实际情况

d) 了解负二项分布：结合 Bernoulli 试验理解它和几何分布之间的关系，并利用这个关系计算期望和方差。

e) 了解超几何分布的背景，不需要知道概率分布列，即使考也会告诉你分布列，了解放回抽样和不放回抽样的关系。

2. 连续型分布

a) 均匀分布：一维均匀分布的分布函数、概率密度、期望和方差；多维均匀分布与几何概型的关系。

b) 指数分布：分布函数、概率密度、期望、方差，无记忆性。

c) 正态分布：一维正态分布的概率密度、期望、方差、标准化；二维正态分布的概率密度及参数的统计含义。掌握可逆仿射变换下正态性的不变性，正态分布的独立可加性，正态分布随机变量独立性判断等有关结论。

d) 分布、t 分布、F 分布：模式化定义，一定要知道怎么构造出来的，不然区间估计和假设检验没法做（例如，n 个独立的一维标准正态随机变量的平方和服从自由度为 n 的 分布）【概率密度不作为考试要求】

五、 极限定理

1. （Bernoulli、Chebyshev、Markov、辛钦的）（弱）大数定律，Chebyshev 不等式及其应用，依概率收敛的定义和验证【强大数定律不作为考试要求】。主要就三个
2. 中心极限定理（掌握独立同分布情形 De Moivre-Laplace，Lindeberg-Levy）及其应用。一定要会用这两个近似计算，是否加 0.5 修正无所谓的。了解依分布收敛的概念。【独立不同分布情形的中心极限定理不作为考试要求】

数理统计初步部分

六、 数理统计的基本概念

1. 总体、抽样、样本、简单随机样本、经验分布函数、样本函数、统计量及其抽样分布、
2. 重要的统计量：次序统计量、样本均值、样本方差、样本标准差、样本矩
3. 正态总体的重要统计量及其性质，与正态总体有关的重要抽样分布：分布，t-分布，F-分布。性质一定要知道，证明不用

七、 参数的点估计

1. 点估计的常用方法：矩估计、极大似然估计（似然函数、对数似然函数），bayes 不考
2. 点估计优良性评判：无偏性，有偏估计的无偏化，（无偏估计的）有效性、相合性（也称为一致性），误差不考

八、 参数的区间估计

1. 理解置信区间和置信水平（或“置信度”），正确理解区间估计的意义。
2. 了解构造参数区间估计的原理。

3. 掌握单个正态总体的均值和方差的区间估计【两个正态总体均值、方差比较不作为考试要求】和假设检验一起复习，看二者有什么关系

九、 **参数的假设检验**

1. 假设检验的一般原理，原假设与备择假设，拒绝域，第一类错误（弃真）和第二类错误（存伪），假设检验的显著性水平。
2. 单个正态总体均值和方差的假设检验（含双侧和单侧的情形）。

两个收敛的概念一定要知道，验证相合性（依概率收敛）、无偏性（数学期望等于）

概率论试题（2004-2005 学年第一学期）

一．单项选择题（每小题 3 分，共 15 分）

1．设事件 A 和 B 的概率为 $P(A)=\dfrac{1}{2},P(B)=\dfrac{2}{3}$ 则 $P(AB)$ 可能为（　）

(A) 0;　　(B) 1;　　(C) 0.6;　　(D) 1/6

2. 从 1、2、3、4、5 这五个数字中等可能地、有放回地接连抽取两个数字,则这两个数字不相同的概率为（　）

(A) $\dfrac{1}{2}$;　　(B) $\dfrac{2}{25}$;　　(C) $\dfrac{4}{25}$;　　(D)以上都不对

3．投掷两个均匀的骰子，已知点数之和是偶数，则点数之和为 6 的概率为（　）

(A) $\dfrac{5}{18}$;　　(B) $\dfrac{1}{3}$;　　(C) $\dfrac{1}{2}$;　　(D)以上都不对

4．某一随机变量的分布函数为 $F(x)=\dfrac{a+be^x}{3+e^x}$，则 $F(0)$的值为（　）

(A) 0.1;　　(B) 0.5;　　(C) 0.25;　　(D)以上都不对

5．一口袋中有 3 个红球和 2 个白球，某人从该口袋中随机摸出一球，摸得红球得 5 分，摸得白球得 2 分，则他所得分数的数学期望为（　）

(A) 2.5;　　(B) 3.5;　　(C) 3.8;　　(D)以上都不对

二．填空题（每小题 3 分，共 15 分）

1．设 A、B 是相互独立的随机事件，$P(A)=0.5$, $P(B)=0.7$, 则 $P(A\cup B)$=_____.

2．设随机变量 $\xi\sim B(n,p),\ E(\xi)=3,\ D(\xi)=1.2$，则 n=______.

3．随机变量 ξ 的期望为 $E(\xi)=5$，标准差为 $\sigma(\xi)=2$，则 $E(\xi^2)$=_______.

4．甲、乙两射手射击一个目标，他们射中目标的概率分别是 0.7 和 0.8.先由甲射击，若甲未射中再由乙射击。设两人的射击是相互独立的，则目标被射中的概率为_________.

5．设连续型随机变量 ξ 的概率分布密度为 $f(x)=\dfrac{a}{x^2+2x+2}$，a 为常数，则 $P(\xi\geqslant 0)$=_______.

三．(本题 10 分)将 4 个球随机地放在 5 个盒子里，求下列事件的概率

(1)　4 个球全在一个盒子里;

(2) 恰有一个盒子有 2 个球.

四．(本题 10 分) 设随机变量 ξ 的分布密度为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{A}{1+x}, & \text{当}0\leqslant x\leqslant 3\\ 0, & \text{当x<0或x>3}\end{cases}$$

(1)　求常数 A;　(2) 求 $P(\xi<1)$;　　(3) 求 ξ 的数学期望.

五．(本题 10 分) 设二维随机变量(ξ, η)的联合分布是

	$\eta=1$	η=2	$\eta=4$	$\eta=5$
$\xi=0$	0.05	0.12	0.15	0.07
$\xi=1$	0.03	0.10	0.08	0.11
$\xi=2$	0.07	0.01	0.11	0.10

(1) ξ 与 η 是否相互独立? (2) 求 $\xi\cdot\eta$ 的分布及 $E(\xi\cdot\eta)$；

六．(本题 10 分)有 10 盒种子，其中 1 盒发芽率为 90％，其他 9 盒为 20％.随机选取其中 1 盒，从中取出 1 粒种子，该种子能发芽的概率为多少？若该种子能发芽，则它来自发芽率高的 1 盒的概率是多少？

七．(本题 12 分) 某射手参加一种游戏，他有 4 次机会射击一个目标.每射击一次须付费 10 元. 若他射中目标，则得奖金 100 元，且游戏停止. 若 4 次都未射中目标，则游戏停止且他要付罚款 100 元. 若他每次击中目标的概率为 0.3,求他在此游戏中的收益的期望.

八．(本题 12 分)某工厂生产的零件废品率为 5％，某人要采购一批零件，他希望以 95％的概率保证其中有 2000 个合格品.问他至少应购买多少零件？

(注：$\Phi(1.28)=0.90$, $\Phi(1.65)=0.95$)

九．(本题 6 分)设事件 A、B、C 相互独立，试证明 $A\bigcup B$ 与 C 相互独立.

某班有 50 名学生，其中 17 岁 5 人，18 岁 15 人，19 岁 22 人，20 岁 8 人，则该班学生年龄的样本均值为________.

十．测量某冶炼炉内的温度，重复测量 5 次，数据如下（单位：℃）：

1820，1834，1831，1816，1824

假定重复测量所得温度 $\xi\sim N(\mu,\sigma^2)$.估计 $\sigma=10$，求总体温度真值 μ 的 0.95 的置信区间.

(注：$\Phi(1.96)=0.975$, $\Phi(1.65)=0.95$)

解答与评分标准

一．1.（D）、2.（D）、3.（A）、4.（C）、5.（C）

二．1．0.85、2. n=5、3. $E(\xi^2)$=29、4. 0.94、5.　3/4

三．把 4 个球随机放入 5 个盒子中共有 5^4=625 种等可能结果--------------3 分

（1）A={4 个球全在一个盒子里}共有 5 种等可能结果,故

$P(A)$=5/625=1/125--5 分

(2) 5 个盒子中选一个放两个球，再选两个各放一球有

$C_5^1C_4^2=30$ 种方法---7 分

4 个球中取 2 个放在一个盒子里，其他 2 个各放在一个盒子里有 12 种方法

因此，B={恰有一个盒子有 2 个球}共有 4×3=360 种等可能结果.故

$$P(B)=\frac{360}{625}=\frac{72}{125}$$ ---10 分

四．解：（1）$\int_{-\infty}^{\infty}f(x)dx=\int_0^3\frac{A}{1+x}dx=A\ln 4, A=\frac{1}{\ln 4}$ ---------------------3 分

（2）$P(\xi<1)=\int_0^1\frac{A}{1+x}dx=A\ln 2=\frac{1}{2}$ -------------------------------6 分

（3）$E(\xi)=\int_{-\infty}^{\infty}xf(x)dx=\int_0^3\frac{Ax}{1+x}dx=A[x-\ln(1+x)]_0^3$

$$=\frac{1}{\ln 4}(3-\ln 4)=\frac{3}{\ln 4}-1$$ ------------------------------------10 分

五．解：（1）ξ 的边缘分布为

$$\begin{pmatrix}0 & 1 & 2\\ 0.39 & 0.32 & 0.29\end{pmatrix}$$ --------------------------------2 分

η 的边缘分布为

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 4 & 5\\ 0.15 & 0.23 & 0.34 & 0.28\end{pmatrix}$$ ---------------------------4 分

因 $P(\xi=0,\eta=1)=0.05\neq P(\xi=0)P(\eta=1)$，故 ξ 与 η 不相互独立-------5 分

（2）$\xi\cdot\eta$ 的分布列为

$\xi\cdot\eta$	0	1	2	4	5	8	10

P	0.39	0.03	0.17	0.09	0.11	0.11	0.10

因此，

$$E(\xi\cdot\eta)=0\times0.39+1\times0.03+2\times0.17+4\times0.09+$$
$$5\times0.11+8\times0.11+10\times0.10=3.16$$

-------10 分

另解：若ξ与η相互独立,则应有

P(ξ＝0, η＝1)＝P(ξ＝0)P(η＝1); P(ξ＝0, η＝2)＝P(ξ＝0)P(η＝2);

P(ξ＝1, η＝1)＝P(ξ＝1)P(η＝1); P(ξ＝1, η＝2)＝P(ξ＝1)P(η＝2);

因此，

$$\frac{P(\xi=0,\eta=1)}{P(\xi=1,\eta=1)}=\frac{P(\xi=0,\eta=2)}{P(\xi=1,\eta=2)}=\frac{P(\xi=0)}{P(\xi=1)}$$

但 $\frac{0.05}{0.03}\neq\frac{0.12}{0.10}$，故ξ与η不相互独立。

六．解：由全概率公式及 Bayes 公式

P(该种子能发芽)＝0.1×0.9+0.9×0.2＝0.27-----------------------------------5 分

P(该种子来自发芽率高的一盒)＝(0.1×0.9)/0.27＝1/3---------------------10 分

七．令 A_k={在第 k 次射击时击中目标}，A_0={4 次都未击中目标}。

于是 $P(A_1)=0.3$; $P(A_2)=0.7\times0.3=0.21$; $P(A_3)=0.7^2\times0.3=0.147$

$P(A_4)=0.7^3\times0.3=0.1029$;　　$P(A_0)=0.7^4=0.2401$-----------------------------------6 分

在这 5 种情行下，他的收益ξ分别为 90 元，80 元，70 元，60 元，－140 元。
--8 分

因此，

$$E(\xi)=0.3\times90+0.21\times80+0.147\times70+0.1029\times60+$$
$$0.2401\times(-140)=26.65$$

--------------------12 分

八．解：设他至少应购买 *n* 个零件，则 *n*≥2000，设该批零件中合格零件数ξ服从二项分布 B(n,p), p=0.95．因 *n* 很大，故 B(n,p)近似与 *N*(*np*,*npq*) ------------4 分

由条件有

$$P(\xi\geq2000)\approx1-\Phi(\frac{2000-np}{\sqrt{npq}})=0.95$$ ---8 分

因 $\Phi(1.65)=0.95$，故 $\frac{200-np}{\sqrt{npq}}=-1.65$，解得 n=2123,

即至少要购买 2123 个零件. --12 分

九．证：因 A、B、C 相互独立，故 P(AC)=P(A)P(C), P(BC)=P(B)P(C), P(AB)=P(A)P(B), P(ABC)=P(A)P(B)P(C).

$P((A\bigcup B)C)=P(AC\bigcup BC)=P(AC)+P(BC)-P(ABC)$ ------2 分

$=P(A)P(C)+P(B)P(C)-P(A)P(B)P(C)$ ---------------------------4 分

$=[P(A)+P(B)-P(A)P(B)]P(C)=P(A\bigcup B)P(C)$

故 $A\bigcup B$ 与 C 相互独立. ---6 分

十．解：$\bar{\xi}=\frac{1}{5}(1820+1834+1831+1816+1824)=1825$ -------------------2 分

已知$1-\alpha=0.95,\ \ \alpha=0.05$，$u_{\frac{\alpha}{2}}=u_{0.025}=1.96$ ---------------------------5 分

$\sigma=10$，n=5,　 $u_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}=u_{0.025}\frac{10}{\sqrt{5}}=\frac{1.96\times 10}{\sqrt{5}}=8.77$ -------------------8 分

所求真值 μ 的 0.95 的置信区间为[1816.23, 1833.77]（单位：℃）-------10 分

《概率论》期末考试试题

1. 一本书共有1,000,000个印刷符号，排版时每个符号被排错的概率为0.0001，校对时每个排版错误被改正的概率为0.9，求在校对后错误不多于15个的概率.

2. 某赌庄有资产100,000元. 另有一赌徒拥有无穷大的赌资，试图使该赌庄破产. 他每次压注1000元，每次赢钱的概率为0.49而输钱的概率为0.51. 问该赌徒能使赌庄破产的概率为多大?

3. 考虑[0,∞]上的Poisson过程， 参数为λ. T是与该Poisson过程独立的随机变量,服从参数为μ的指数分布. 以N_T表示[0, T]中Poisson过程的增量， 求N_T的概率分布.

4. 设$\xi_1\xi_2\cdots\cdots\xi_n$是独立同分布随机变量，且三阶中心矩等于零，四阶矩存在，求$\bar{\xi}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\xi_k$和$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(\xi_k-\bar{\xi})^2$的相关系数.

5. 设X是连续型随机变量,密度函数 $f_X(x)=(1/2)\exp(-|x|)$, $-\infty< x <\infty$.
   a. 证明特征函数 $\phi_X(t)=1/(1+t^2)$.
   b. 利用上述结果和逆转公式来证明

$$e^{-|x|}=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-ixt}\frac{1}{\pi(1+t^2)}dt=\int_{-\infty}^{\infty}e^{ixt}\frac{1}{\pi(1+t^2)}dt$$

6. 设随机变量序列ξ_n依概率收敛于非零常数 a，而且$\xi_n\neq0$. 证明 $1/\xi_n$依概率收敛于1/a.

7. 假设X与Y是连续型随机变量.记Var[Y|X=x]为给定X=x的条件下Y的方差. 如果E[Y|X=x]=μ与X无关，证明EY=μ而且VarY=$\int_{-\infty}^{\infty}Var[Y\mid X=x]f_X(x)dx$.

8. 设{ξ_n}为独立随机变量序列，且ξ_n服从(-n, n)上的均匀分布，证明对{ξ_n}中心极限定理成立.

9. 设X,Y和Z的数学期望均为0，方差均为1. 设X与Y的相关系数为ρ_1, Y与Z的相关系数为ρ_2, X与Z的相关系数为ρ_3. 证明 $\rho_3\geq\rho_1\rho_2-\sqrt{1-\rho_1^2}\ \sqrt{1-\rho_2^2}$.

10. 用概率方法证明如下 Weierstrass 定理:对区间[0,1]上任何连续函数 f(x)，必存在多项式序列{$b_n(x)$}，使在区间[0,1]上一致地有 $b_n(x)\ \rightarrow\ f(x)$.

附：常用正态分布函数值：Φ(1.28)= 0.9， Φ(2)= 0.977，Φ(2.33)= 0.99，Φ(2.58)= 0.995
Φ(1.64)= 0.95， Φ(1.96)= 0.975，

概率论与数理统计试题(A)

姓名___________学号___________班级__________

题号	一	二	三	四	五	六	七	总分
得分								

一、 选择题（20%）

1．如果（　　）成立，则事件 A 与 B 互为对立。

（A） $AB=\Phi$　　　（B） $A\cup B=\Omega$

（C） $AB=\Phi$ 且 $A\cup B=\Omega$　　　（D） A 与 B 互不相容

2. 每次试验的成功率为 $p(0<p<1)$，则在 3 次重复试验中至少失败一次概率为（　　）。

（A） $(1-p)^2$　　　（B） $1-p^2$

（C） $3(1-p)$　　　（D）以上都不对

3．设随机变量 X 的密度函数 $p(x)=\dfrac{k}{1+x^2}(-\infty<x<+\infty)$，则 k 的值是（　　）

（A） $\dfrac{1}{\pi}$　　　（B） $\dfrac{2}{\pi}$

（C） $\dfrac{1}{\sqrt{\pi}}$　　　（D） $\dfrac{2}{\sqrt{\pi}}$

4. 设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自总体 X 的样本则（　　）

（A） $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 同分布　　　（B） $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 与 X 同分布

（C） $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 独立同分布　　　（D） $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 与 X 同分布且独立

5. 总体未知参数 θ 的估计量 $\hat{\theta}$ 是（　　）

（A） 随机变量　　　（B） 总体

（C） θ　　　（D） 均值

二、填空题（20%）

1. A,B 事件，则 $AB\cup A\overline{B}=$__________。

2. 已知 $P(A)=0.1,\quad p(B)=0.2,$ 且 A,B 相互独立，则 $p(AB)=$______；

$p(\overline{AB})$=______

3. 设二维随机变量的联合密度函数为 $p(x)=\begin{cases}4xy & ,0<x<1,\quad 0<y<1\\ 0 \quad , & other\end{cases}$ ，则

$p(0<X<0.5)=$____________

4.设总体 X 的密度函数为 $p(x)$，$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自总体 X 的 样 本 ， 则

$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 的联合密度函数为________________。

5. 假设检验所依据的原则是____。

三、袋中有红、黄、白色球各 1 只，每次任取 1 只球，进行有放回抽样 3 次，求取到的 3 只球中没有红球或没有黄球的概率。（12%）

四、生产灯泡的合格率为 0.6，求 10000 个灯泡中合格数在 5800~6200 的概率。（12%）

五、一台机床有 $\frac{1}{3}$ 的时间加工零件 A，其余的时间加工零件 B，加工零件 A 时，停机的概率是 0.3，加工零件 B 时，停机的概率是 0.4。

（1） 求这台机床停机的概率;

（2） 发现停机了，求它是在加工零件 B 的概率。（12%）

六、假定初生婴儿的体重服从正态分布 $N(\mu\quad,\quad 375^2)$，随机抽取 12 名新生婴儿，测得体重（ 单位：克）为 3100 2520 3000 3000 3600 3160

3560 3320 2880 2600 3400 2540

试求新生婴儿体重的置信度为 95%的置信区间。（12%）

七、已知总体 $X\sim N(4.55\quad,\quad 0.108^2)$，现从总体 X 抽取 5 个个体，得数据为

4.28 4.40 4.42 4.35 4.37 。若方差不变，问总体均值有无变化。（12%）

姓名_________学号_________班级_________得分__________

《概率论与数理统计》试卷(B)

一、填空：(20%)

（1） 设 X 服从参数为 λ 的泊松分布，$P(X=n)=$______，

$EX=$________$,DX=$_________$,EX^2=$_________;

（2） 设 X 服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$，则其密度函数，$f(x)=$______，

$EX=$________$,DX=$_________$,EX^2=$_________;

（3）设事件 A_i 为第 i 次射击命中目标(I=1,2,3)，试用 A_i 表示下列事件：

(i)三次射击中至少有一次命中目标；___________

(ii) 三次射击中没有一次命中目标；______________

(iii) 三次射击中恰有一次命中目标。_____________

（4）设 $P(A/B)=0.2$，$P(A)=0.3$，$P(B)=0.5$，则 $P(AB)=$_____，

$P(B/A)=$_______。

(5)设 $X_1,\cdots,X_5$ 为来自于总体 $N(0,1)$，则 $X_1+\cdots+X_5$~ ___________；$X_1^2+\cdots+X_5^2$ ~ ___________。

（6）设 X ~ $N(1,2^2)$，$\Phi(x)$ 为 X 的分布函数，试用 $\Phi(x)$ 表示下列概率：

$P(X\le 1)=$________，$P(0\le X\le 2)=$___________。

(7) 设离散型随机变量 X 的分布律为

X	1	2	3
P	0.5	0.2	α

则 $\alpha=$_______，$EX=$________，$DX=$_______。

二、选择题：(12%)

(1) 事件 A 是不可能事件是 $P(A)=0$ 的

(a) 充分条件　　(b) 必要条件

(c) 充要条件　　(d) 既不充分又不必要

(2) 设 X,Y 均服从正态分布，则协方差 $Cov(X,Y)=0$ 是 X 与 Y 相互独立的

(a) 充分条件　　(b) 必要条件

(c) 充要条件　　(d) 既不充分又不必要

(3) 矩估计是

（a） 点估计 (b) 极大似然估计

（c） 区间估计 (d) 无偏估计

三、设连续型随机变量 X 的密度函数 $f(x)=\begin{cases} ax^2, 0\le x\le 1 \\ 0,\text{其它} \end{cases}$

求：（i）a ；（ii） EX, DX；（iii）分布函数 $F(x)$（12%）

四、设甲袋中有三个红球及一个白球，乙袋中有四个红球及二个白球，甲袋中任取一个球（不看颜色）放到乙袋子后，再从乙袋子中任取一个球。试用全概率公式求最后取得红球的概率。（12%）

五、设有四个球，其中标有数字 1，2 的球各有 2 个现依次（不放回）从中任取二球，设第 i 次取到球上的数字为 $X_i(i=1,2)$，求：

（i） (X_1, X_2) 的分布律，

（ii） X_1, X_2 的边缘分布律，

（iii）X_1, X_2 是否相互独立，为什么？ （11%）

六、设 $X_1,\cdots,X_n$ 为来自于总体 X 的样本，总体 X 的密度函数为 $f(x)=\begin{cases} \frac{1}{\theta}e^{-\frac{x}{\theta}}, 0\le x \\ 0,\text{其它} \end{cases}$，

试求参数 θ 的矩估计量 $\hat{\theta}$ 。 （11%）

七、二维随机变量（X, Y）服从区域 D：$0\le x\le 1, 0\le y\le 2$ 上的均匀分布，试求：

（i）X, Y 的联合密度函数 $f(x)$；

（ii）X, Y 的边缘密度函数 $f_X(x), f_Y(y)$；（iii）$E(XY)$ （11%）

八、设某厂生产的 100 瓦灯泡的使用寿命 $X\sim N(\mu, 100^2)$（单位：小时）。现从某批灯泡中抽取 5 只，测得使用寿命如下：

1455， 1502， 0370， 1610， 1430

试求这批灯泡平均使用寿命的置信度为 0.95 的置信区间（已知 $u_{0.05}=1.64, u_{0.025}=1.96$）（11%）

清华大学本科生考试试题专用纸

考试课程　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　年　　月　　日

卷 **B**《概率论与数理统计考试题》(03.12)　　　　班级________学号________姓名__________

记号：~服从；　:= 记为；　*iid* 独立同分布；　*df* 分布函数；　*pdf* 分布密度函数；
$\boldsymbol{rv}$ 随机变量；$\boldsymbol{r\vec{v}}$ 随机向量 **B**(n, *p*)二项分布　**P**(λ) Poisson 分布；**Ge**(*p*) 几何分布；
Ex(λ) 指数分布；　**U**(a,b)均匀分布；　N(μ,σ^2)正态分布。

一(30 分)填空与判断正误（正确时填√，错误时填×；填入的分布必须带参数）

1. 设 P(AB)=0.2，P(A)=0.5, P(B-A)=0.2, 则 P(A∪B)=________及 P($\overline{B}$)=________；且事件 A 与 B 独立（　　）

2. 设两个相互独立的事件 A 和 B 都不发生的概率为 1/9，事件 A 发生 B 不发生的概率与事件 A 不发生 B 发生的概率相等，则 P（A）=___________

3. 设$(X_1,X_2)\sim N(0,0,\sigma^2,\sigma^2,0.5)$，令$Y_1=X_1-\frac{1}{2}X_2$，$Y_2=\frac{1}{2}X_1-X_2$，则$Y_1$和$Y_2$都有正态分布且分布参数相同（　　），但不独立（　　　）。

4. 设有一个强度为λ的电话呼叫 Poisson 流，η_3是其第三个呼叫来的时刻，试利用切贝雪夫不等式求概率 P($|\lambda\eta_3-3|<\lambda$)的下限=_________

5. 设 rv X 和 Y *iid*, ~U[-1,1]，并如下定义 rv Z，求 DZ=________

$$Z=\begin{cases}1 & 若\ X>Y\\ 0 & 若\ X=Y\\ -1 & 若\ X<Y\end{cases}$$

6. 设总体 X 的方差存在，$X_1,X_2,\ldots,X_{n+1}$是其简单样本，令$Y_k=\frac{1}{k}\Sigma_{i=1}^{k}X_i$，k=n.,n+1，则用$Y_n$及$Y_{n+1}$估计 EX 时，$Y_{n+1}$比$Y_n$更有效（　　）
如果总体$X\sim N(0,\sigma^2)$，则$\frac{X_1+X_2}{|X_1-X_2|}$的分布为 t(2)。（　　　）

二(**10** 分) 试证指数分布的无记忆性，即如 X~Ex(λ)，则对任意的 s,t>0，有 *P(X>t+s|X>s)=P(X>t)*

1

三(**10** 分) 经以往检验已确认某公司组装 PC 机的次品率为 0.04，现对该公司所组装的 PC100 台逐个独立的测试。

(1) 试求不少于 4 台次品的概率（只要写出精确计算的表达式）；

(2) 用 Poisson 逼近定理给出此概率的近似值。

四(**10** 分)设二维 $\boldsymbol{r\vec{v}}$**(X,Y)**在矩形$\mathrm{G} = \{(x, y)|0 \le x \le y \le 1\}$上服从均匀分布，试求边长为 X 和 Y 的矩形面积 S 的 pdf $f(s)$.

五(**10** 分) 设$\boldsymbol{r\vec{v}}$**(X,Y)**的 pdf 为$f(x, y) = \frac{1}{2}[\varphi_1(x, y) + \varphi_2(x, y)]$，其中$\varphi_1(x, y)$和$\varphi_2(x, y)$都是二维正态 pdf，且他们对应的二维 rv 的相关系数分别为 1/3 和−1/3，它们的边缘 pdf 所对应的 rv 的数学期望都是 0，方差都是 1.

(1) 求 X 和 Y 的 pdf $f_1(x)$和$f_2(x)$，及 X 和 Y 的相关系数ρ（可以直接利用二维正态密度的性质）

(2) 问 X 和 Y 是否独立？为什么？

六(**10** 分) 3 个袋子各装 r+b 只球，其中红球 r 只。今从第 1 个袋子随机取一球，放入第 2 个袋子，再从第二个袋子再随机取一球，放入第 3 个袋子。令

$$X_k = \begin{cases} 1 & （当第k次取出红球） \\ -1 & （反之） \end{cases}, k = 1,2,3$$

则(1)试求 $\boldsymbol{X_3}$ 的分布； (2) 设 $r=b$，求 X_1 和 X_2 的相关系数 ρ (3)求$\Sigma_{i=1}^{n} = X_i$的精确分布

七(**20** 分) 设某糖厂用自动包装机集箱外运糖果，某日开工后在生产线上抽测 9 箱，得数据 99.3, 98.7, 100.5, 101.2, 98.3, 99.7, 99.5, 102.1, 100.5 （kg）。认为包装的每箱糖重为正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$，参数未知，取 α=0.05。

(1) 试着给出μ的最大似然估计值（可以利用似然估计的已有结论）

(2) 求σ的置信度为 0.95 的双侧置信区间。

(3) 如果规定包装机每箱糖重量为 100kg，问由抽测数据能否有 95%的把握断言生产线上每箱装糖重量不低于规定重量？

附表 $z_{0.05}$=1.64, $z_{0.025}$=1.96

$\chi^2_\alpha(n)$	n=8	n=9	$\chi^2_\alpha(n)$	n=8	n=9	$t_\alpha(n)$	n=8	n=9
α=0.95	2.733	3.325	α=0.05	15.507	16.919	α=0.05	1.8595	1.8331
α=0.975	2.180	2.700	α=0.025	17.535	19.023	α=0.025	2.3060	2.2622

参考答案

一．1. $\underline{0.7}$，$\underline{0.6}$，$\underline{\surd}$

2. $\underline{2/3}$

3. $\underline{\surd}$，$\underline{\surd}$

4. $\underline{3/\lambda^2}$

5. $\underline{1}$

6. $\underline{\surd}$，$\underline{\times}$

二．$\dfrac{e^{-\lambda(t+s)}}{e^{-\lambda s}}=e^{-\lambda t}$

三．（1）$1-\sum_{k=0}^{3}C_n^k p^k(1-p)^{n-k}=1-\sum_{k=0}^{3}C_{100}^k(0.04)^k\cdot(0.96)^{100-k}$

（2）$\lambda=100\times0.04=4,$

$$\therefore P=1-\frac{4^0}{0!}e^{-4}-\frac{4^1}{1!}e^{-4}-\frac{4^2}{2!}e^{-4}-\frac{4^3}{3!}e^{-4}=1-e^{-4}\left(1+4+8+\frac{32}{3}\right)\approx0.56$$

四．

$$f(s)=\begin{cases}0, & s\le0\\ -\ln s, & 0<s\le1\\ 0, & s>1\end{cases}$$

六．（1）$X_3\sim\begin{pmatrix}-1 & 1\\ \frac{b}{r+b} & \frac{r}{r+b}\end{pmatrix}$

（2）$\rho=\frac{\operatorname{cov}(X_1,X_2)}{\sqrt{DX_1}\sqrt{DX_2}}=\frac{EX_1X_2-EX_1EX_2}{\sqrt{DX_1}\sqrt{DX_2}}=\frac{EX_1X_2-(EX_1)^2}{EX_1^2-(EX_1)^2}$

由（1）知，$EX_1=EX_2=\frac{r-b}{r+b}$，$EX_1^2=EX_2^2=1$，

由 $P(X_1X_2=1)=\frac{r+1}{2r+1}$（当 $b=r$ 时），$P(X_1X_2=-1)=\frac{r}{2r+1}$，$\therefore EX_1X_2=\frac{1}{2r+1}$

$\therefore\rho=\frac{1}{2r+1}$

七．（1）$\hat{\mu}_L=\frac{1}{9}\sum_{i=1}^{9}x_i=99.98$，（2）(0.77, 4.4)，

（3）统计量$W=\frac{\bar{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}}\sim t(n-1)\sim t(8)$，其拒绝域为$(-\infty,-1.8595)$

其观测值为 1/200，不再拒绝域之内，接受$\mu\ge\mu_0=100\text{kg}$的假设

3

2003 学年上学期《 概率论与数理统计》试卷

（A 卷，3 学分用，共 10 道大题，120 分钟，2004 年 1 月）

一、**选择题**（每小题 3 分，共 24 分）

1. 假设事件 A 和 B 满足____C_____,则有 P(B|A)=1。

（A） $A \subset B$ ；(B) $P(B|\overline{A})=0$；(C) $A \supset B$；(D) A 是必然事件。

2. A,B 是任意二事件，则下列各结论中正确的是___C______。

（A）$(A\cup B)-B=A;$（B）$(A-B)\cup B=A;$（C）$(A\cup B)-B\subset A;$

（D）$(A-B)\cup B\subset A$。

3. 设随机变量 X 与 Y 相互独立，其分布列分别为

X~ $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0.5 & 0.5 \end{pmatrix}$　　　Y~$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0.5 & 0.5 \end{pmatrix}$

则下列各式正确的是______C___。

（A）$X=Y;$（B）$P(X=Y)=0;$（C）$P(X=Y)=\frac{1}{2};$（D）$P(X=Y)=1$。

4. 设随机变量 X 的密度函数为$f(x)=\frac{1}{\pi(1+x^2)}$，则 Y=2X 的密度函数为

______A___。

（A）$\frac{2}{\pi(4+y^2)}$;（B）$\frac{1}{\pi(4+y^2)}$;（C）$\frac{1}{\pi(1+4y^2)}$;（D）$\frac{2}{\pi(1+y^2)}$。

5. 设随机变量 X，Y 满足$D(X+Y)=D(X-Y)$，则必有___A______。

（A）X,Y 不相关;（B）X,Y 独立;（C）$D(Y)=0;$（D）$D(XY)=0$。

6. 设$X_1,X_2,\cdots,X_9$相互独立，且$E(X_i)=1,D(X_i)=1(i=1,\cdots,9)$，则对$\forall\varepsilon>0,$有

_________。

（A）$P\{\left|\sum_{i=1}^{9}X_i-1\right|<\varepsilon\}\ge 1-\varepsilon^{-2}$;（B）$P\{\left|\frac{1}{9}\sum_{i=1}^{9}X_i-1\right|<\varepsilon\}\ge 1-\varepsilon^{-2}$;

（C）$P\{\left|\sum_{i=1}^{9}X_i-9\right|<\varepsilon\}\ge 1-\varepsilon^{-2}$;（D）$P\{\left|\sum_{i=1}^{9}X_i-9\right|<\varepsilon\}\ge 1-9\varepsilon^{-2}$。

7． 已知 X~B(n,p), E(X)=2.4, D(X)=1.44,则二项分布的参数为_____B____。

（A） $n=4, p=0.6$；（B） $n=6, p=0.4$；（C） $n=8, p=0.3$；

（D） $n=24, p=0.1$。

8． 设 X_1 和 X_2 为任意两个相互独立的连续型随机变量，它们的概率密度函数分别为 $f_1(x)$ 和 $f_2(x)$, 分布函数分别为 $F_1(x)$ 和 $F_2(x)$, 则下列各结论中正确的是______D___。

（A） $f_1(x)+f_2(x)$ 必为某一随机变量的密度函数；

（B） $f_1(x)\times f_2(x)$ 必为某一随机变量的密度函数；

（C） $F_1(x)+F_2(x)$ 必为某一随机变量的分布函数；

（D） $F_1(x)\times F_2(x)$ 必为某一随机变量的分布函数。

二、（8 分）盒子中有 10 个球，其中 4 个白球，4 个黑球，2 个红球。现从盒中随机取 3 个球，求

（1） 取到的球中恰好含有两个白球的概率；0.3

（2） 取到的球中至少含有一个白球 的概率。5/6

三、（8 分）掷两颗骰子，在已知两颗骰子点数之和为 7 的条件下，求其中一颗为 1 点的条件概率。1/3

四、（8 分）一袋中有 5 个球，编号为 1，2，3，4，5。现从中一次取 3 个球，以 X 表示取出的 3 个球中的最小号码，试求 X 的分布列。

X	1	2	3
P	0.6	0.3	0.1

五、（10 分）设随机变量 X 的密度函数为

$$f(x)=\begin{cases}1-|x|, & -1<x<1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

求随机变量 $Y=X^2+1$ 的分布函数与密度函数。

六、（8 分）设连续型随机向量（X,Y）的概率密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{3}{2}xy^2, & 0\le x\le 2, 0\le y\le 1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

问 X 与 Y 是否独立？

七、（8 分）设随机变量 X~B(100,0.8),试用棣莫弗—拉普拉斯定理求

$P\{80\le X\le 100\}$ 的近似值（ $\Phi(x)$ 为标准正态随机变量的分布函数，当 x>4 时，取 $\Phi(x)=1$）。0.5

八、（10 分）设总体 X 服从几何分布，即

$$P\{X=k\}=(1-p)^{k-1}p, \quad k=1,2,\cdots$$

其中$0<p<1$。现从 X 中抽得容量为 n 的样本的一组观察值$x_1,\cdots,x_n$，求参数 p 的最大似然估计。

九、（10 分）在正态总体 N(μ,1)中抽取容量为 100 的样本，经计算得样本均值的观测值$\bar{x}=5.32$,试在显著性水平$\alpha=0.01$下，检验假设$H_0:\mu=5, H_1:\mu\neq 5$（其中$\Phi(2.57)=0.995, \Phi(2.33)=0.99$）。

十、（6 分）设某班车起点站上车人数 X 服从参数为λ（λ>0）的泊松分布，并且中途不再有人上车。而车上每位乘客在中途下车的概率为 p$(0<p<1)$,且中途下车与否相互独立，以 Y 表示在中途下车的人数。试求（1）（X,Y）的联合概率分布律；（2）求 Y 的分布律（列）。（注：教材 P212 有答案）

清华大学本科生考试试题专用纸

考试课程　　　　　　　　　　　　　　　　　年　　月　　日

卷 **B** 《概率统计考试题》(04.06)　　班级________学号________姓名_________

记号：~服从；　:= 记为；　*iid* 独立同分布；　*df* 分布函数；　*pdf* 分布密度函数；

$\boldsymbol{rv}$ 随机变量；　$\boldsymbol{r\vec{v}}$ 随机向量；　B(n, *p*)二项分布；　P(λ) Poisson 分布；

Ge(*p*) 几何分布；　Ex(λ) 指数分布；　U(a,b)均匀分布；　N(μ,σ^2)正态分布。

一（33 分）填空与判断正误（正确时填√，错误时填×；填入的分布必须带参数）

1. 设$F_i(x)$和$f_i(x)$分别是X_i的 *df* 和 *pdf*，*i*=1, 2。则$F_1(x)F_2(x)$是分布函数（　　）而$f_1(x)f_2(x)$不是密度函数（　　　　）

2. 设两个相互独立的事件 *A* 和 *B* 都不发生的概率为 1/9，事件 *A* 发生 *B* 不发生的概率与事件 *A* 不发生 *B* 发生的概率相等，则P(*A*)=________________。

3. 设$(X_1,X_2)\sim N(0,0,\sigma^2,\sigma^2,0.5)$，令$Y_1=X_1-\frac{1}{2}X_2$，$Y_2=\frac{1}{2}X_1-X_2$，则$Y_1$和$Y_2$都有正态分布且分布参数相同（　　　　），但不独立（　　　　）。

4. 设$\boldsymbol{rv}$ $X\sim t(n)$　$(n>1)$，$Y=\frac{1}{X^2}$，则$Y\sim$（　　　　　　　　）。

5. 设设$\boldsymbol{rv}$ X和Y都服从$\sim N(0,1)$，则$X+Y$服从正态分布（　　　　）；而X^2和Y^2都服从χ^2分布（　　　　）

6. 设总体 X 的方差存在，$X_1,X_2,\ldots,X_{n-1}$是其简单样本，$Y_k=\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}X_i$，$k=n.,n+1$，则用$Y_n$及$Y_{n+1}$估计 EX 时，$Y_{n+1}$比$Y_n$有效（　　　　）

7. 设$X_1,X_2,\ldots,X_{n-1}$为 *iid*，$\sim N(0,\sigma^2)$，令$\bar{X}=\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}X_j$，$Y_j=X_j-\bar{X}$，*j*=1,2。则$Y_1$与$\mathrm{Y}_2$的相关系数_______________

8. 如果总体$X\sim P(\lambda)$，则当$n\to\infty$时，$Y_n=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2$ 几乎处处收敛于____________。

二（8 分）设 A、B 是两个时间，且 0<P(A)<1，P(B|A)=P(B|Ā)，问 A、B 是否独立？请说明理由。

三（10 分）设$X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$为 *iid*

(1) 如果X_1~0-1 分布，参数为 *p*，试对固定正整数 *k*≤*n*，求如下概率：

$$P\left(\sum_{i=1}^{n} X_i = k\right)、P\left(\sum_{i=1}^{n} X_i = k, X_n = 0\right)，及 P\left(\min\{n: X_n \neq 0, n=1,2,\ldots\} = k\right)$$

(2) 如果X_1~$N(0,\sigma^2)$，试求$\left(\dfrac{X_1+X_2}{X_1-X_2}\right)^2$的分布。

四（10 分）设某网络服务器首次失效时间（寿命）$X\sim \mathrm{Ex}(\lambda)$，现随机购得 4 台中

(1) 令 *Y*：4 台中寿命小于此类服务器期望寿命的台数，求 *Y* 的最可能值。

(2) 事件 *A*：4 台中最早失效时间大于此类服务器期望寿命。求 *A* 的概率。

五（10 分）在计算机上作大型科学计算，需对十进制的 x_j 的小数点后第 6 位作四舍五入，得到的 x_j 近似数为 y_j，则误差 $\varepsilon_j=x_j-y_j$ 在区间$(-0.5\times10^{-5}, 0.5\times10^{-5})$内随机取值，视为从区间内的均匀分布随机变量，令累积误差$\eta_n = \sum_{j=1}^{n} \varepsilon_j$，试利用中心极限定理，当 *n*=10,000 时有 99.7%以上的把握给出$|\eta_n|$的近似估计的上界。 **注 2Φ(3)−1=0.9974.**

六（9 分） 设(X,Y)的 *pdf* 为 $f(x,y) = c\cdot\exp\{-n(x+y)\}I(0<x<y<+\infty)$，其中 *n* 为已知整数，*c* 为待定常数.

七（20 分）设某糖厂用自动包装机集箱外运糖果，某日开工后再生产线上抽测 9 箱，得数据 99.3，100.5，101.2，98.3，99.7，99.5，102.1，100.5（kg）.认为包装的每箱重为正态分布 N(μ,σ^2)，参数 μ 和 σ^2 都未知，取 α=0.05

(1) 试写出 μ 的最大似然估计值和标准差 σ 的置信度为 0.95 的双侧置信区间.

(2) 如果规定包装机没箱装糖重量为 100kg 且方差未知，问由抽测数据能否认为生产线上每箱装糖重量不低于规定重量？

附表 $z_{0.05}$=1.64, $z_{0.025}$=1.96

$\chi^2_\alpha(n)$	n=8	n=9	$\chi^2_\alpha(n)$	n=8	n=9	$t_\alpha(n)$	n=8	n=9
α=0.95	2.733	3.325	α=0.05	15.507	16.919	α=0.05	1.8595	1.8331
α=0.975	2.180	2.700	α=0.025	17.535	19.023	α=0.025	2.3060	2.2622

参考答案：

一．1. √，√

2. $\dfrac{2}{3}$

3. √，√

4. F(n,1)

5. √，√

6 √

7. $\dfrac{1}{n+1}$

8. $\lambda^2+\lambda$

二．解：P(B)=P(B|A)P(A)+P(B|Ā)P(Ā)=P(B|A)[P(A)+P(Ā)]= P(B|A)，所以 A 和 B 独立。

三．(1) $C_n^k p^k(1-p)^{n-k}$，$C_{n-1}^k p^k(1-p)^{n-k}$，$p(1-p)^{k-1}$

(2) $\left(\dfrac{X_1+X_2}{X_1-X_2}\right)^2 \sim F(1,1)$

五．解：$\mathrm{E}\varepsilon_j=0, \mathrm{D}\varepsilon_j=\frac{1}{12}$，$\mathrm{P}(|\eta_n|<a)=0.997$，

$$\mathrm{P}\left(-a<\Sigma\varepsilon_j<a\right)=\mathrm{P}\left(\frac{-a}{\sqrt{1000\times\frac{1}{12}}}<\frac{\Sigma\varepsilon_j}{\sqrt{n}\sigma}<\frac{a}{\sqrt{1000\times\frac{1}{12}}}\right)=2\Phi\left(\frac{a}{5\sqrt{\frac{10}{3}}}\right)-1$$

$$=0.997$$

$$\therefore a=15\sqrt{\frac{10}{3}}$$

六．(1) $c=2n^2$

(2) $f_{Y|X}(y|1)=\mathrm{e}^{-n(y-1)}$

(3) $2n^2\mathrm{e}^{-n(x+y)}\neq\frac{1}{n^2}\mathrm{e}^{-n(x+y)}$，所以 X、Y 不独立

清 华 大 学 本 科 生 考 试 试 题 专 用 纸

考试课程　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　年　　月　　日

卷 **A**《概率论与数理统计考试题》(05.01)　　　班级_________学号_________姓名__________

记号：~服从； := 记为； *iid* 独立同分布； *df* 分布函数； *pdf* 分布密度函数；
rv 随机变量； **B**(n, *p*)二项分布； **P**(λ) Poisson 分布； **Ge**(*p*) 几何分布；
Ex(λ) 指数分布； **U**(a,b)均匀分布； N(μ,σ^2)正态分布； **I(A)=1**，如 **A** 发生。

一(36 分)填空与判断正误（正确时填√，错误时填×；填入的分布必须带参数）

1. 对某射手打靶考核，有两次命中 6 环以下（不含 6 环）时，立即淘汰出局。如果此射手每次命中 6 环及其以上的概率是 0.8，则他在第四次射击后即被淘汰的概率是_________。

2. 设三个事件 A_i，i=1, 2, 3 两两独立，令 **rv**X_i　$X_i=\begin{cases}1 & （如果A_i发生）\\ -1 & （反之）\end{cases}, i=1,2,3$

   则 $\mathbf{E}X_i^2$=_______。又一定有 A_1A_2 与 A_3 独立（　　）；一定有 X_1+X_2 与 X_3 独立（　　）

3. 求随机相位正弦波 $X = A\sin(\omega_0+\Theta)$，其中 ω_0 是常数，***rv*** $\Theta \sim U_{[-\pi,\pi]}$，

   $A \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ q & r & p \end{pmatrix}$，且两者独立，其中 $p,q,r>0, p+q+r=1$，则 ***DX***=___________

4. 某箱装有 100 件产品，其中一、二和三等品分别为 80、10 和 10 件，现在随机抽取一件，

   令 $X_i = \mathrm{I}(抽出i等品)$，i=1, 2, 3，则 $P(X_1X_2=0)$ =________；

   $X_1和X_2$的相关系数=__________

5. 设总体 X 的二阶矩存在，$X_1, X_2,..., X_n$ 是其简单样本，n>1，样本均值为 $\overline{X}$。

   则对 X 期望估计时，$(X_1+\bar{X})/2$ 比$\bar{X}$更有效；（　　　）
   利用切贝雪夫定理，$(X_1+\bar{X})/2$ 以概率收敛于 0，因此是一致估计。（　　　）

6. 设 $X_1, X_2,..., X_n$ 是下列总体$X \sim Ex(\lambda)$的大小为 n 的简单样本，

   则 $\mathrm{P}(X_1<X_2)$ =___________,而 n 足够大时样本均值 $\overline{X}$ 的近似分布_________________。

7. 设总体$X \sim N(\mu_1,\sigma^2)$，总体$Y \sim N(\mu_2,\sigma^2)$，且两个总体独立。从总体 X 和 Y 分别抽取容量是 n_1 和 n_1 的简单随机样本，分别算得样本方差为 S_1^2 和 S_2^2。$D(S_1^2+S_2^2)$ =___________。

二(10 分) 设有 n 个袋子，各装 r+b 只球，其中红球 r 只。今从第 1 个袋子随机取一球，放入第 2 个袋子，再从第二个袋子再随机取一球，放入第 3 个袋子，如此继续。

$$X_k=\begin{cases}1 & （当第k次取出红球）\\ -1 & （反之）\end{cases},k=1,2,3$$

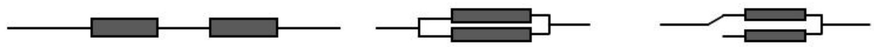
(1)试求 $\mathbf{X_k}$ 的分布；　(2) 设 $r=b$，求 X_1 和 X_2 的相关系数 r

三(10 分) 设(X,Y)的 *pdf* 为 $f(x,y)=\lambda^2 e^{-\lambda x} I(0<y<x)$，($\lambda$>0)

(1) 证明 rv Y 有如下性质：对任意的 $s,t>0$，有 $P(Y>t+s|Y>s)=P(Y>t)$

(2) 求 **E*X***

四(10 分) 用两个独立的同类设备分别组成串联、并联及备用（即当一个接通的设备不能工作时系统立即自动接通另外一个备用设备）系统。如此类设备的寿命为 **Ex**(λ), λ>0，试求三个系统在时刻 t(>0)前失效的概率和三个系统的平均失效时间.



五(10 分) 设在(s,t]时段内到某个网站访问的次数 $\xi_{(s,t]}\sim P(\lambda(t-s))$，$\forall t>s\ge 0$，$\lambda$ 为正常数。

(1) 如果 λ=5，η_2 为第 2 此访问该网站的时刻。利用切贝雪夫不等式求概率 $P(|\lambda\eta_2-2|<\lambda)$的下限；

(2) 引入记号 $N_t := \xi_{(s,t]}$，$0\le\forall t<+\infty$,计算 $E(N_t \mid N_s=k)$，$0\le s<t<+\infty$

六(10 分)设 rv X 的分布函数为 $F(x;\alpha,\beta)=[1-(\alpha/x)^{\beta}]\, I(x>\alpha)$，其中参数 α>0,β>1，设 $X_1,X_2,...,X_n$ 是来自总体 X 的简单随机样本，

(1) 当 α=1,β 未知时，求 $\hat{\beta}_M$；(2) 当 β=2，α 未知时，求 $\hat{\alpha}_L$。

七(12 分) 为提高某一化学生产过程的得率，试图采用一种新的催化剂。试验中，设采用原来催化剂和新催化剂的各进行了 $n_1=n_2=8$ 次试验，而得到得率的平均值分别为$\bar{x}_1=91.73$ 和 $\bar{x}_2=93.75$，样本方差 $s_1^2=3.82$ 和 $s_2^2=4.02$。假设两总体都可认为服从正态分布，且独立。

(1) 可否认为两个总体的方差相等？（作假设检验，取显著性水平 α=0.05）

(2) 在(1)的基础上，给出两总体均值差 $\mu_1-\mu_2$ 的置信度为 0.95 的单侧置信下限。

附表　$z_{0.05}=1.64$,　$z_{0.025}=1.96$

$\chi^2_\alpha(n)$	n=14	n=16	$\chi^2_\alpha(n)$	n=14	n=16	$t_\alpha(n)$	n=14	n=16
α=0.95	6.571	7.962	α=0.05	23.685	26.296	α=0.05	1.7613	1.7459
α=0.975	5.629	6.908	α=0.025	26.119	28.845	α=0.025	2.1448	2.1199
$F_\alpha(n,m)$	n=7	m=7	$F_\alpha(n,m)$	n=7	m=8	$F_\alpha(n,m)$	n=8	m=8
α=0.05	3.79		α=0.05	3.50		α=0.05	3.44	
α=0.025	4.99		α=0.025	4.90		α=0.025	4.43	

解答《概率论与数理统计》(05.01) ×¢£º´ËÄË¹Ù·½ÎÄ±´ð°¸£

一(36 分) 填空与判正误

1. 对某射手打靶…被淘汰的概率是____ 【 0.0768】 2．设三个事件…【 1, ×, ×】

3．求随机相位正弦波…DX=_____ 【$(p+q)/2$】 4. 某箱装【1, –2/3 】

5．设总体 X 二阶矩存在, 【×, ×】 6. 设 $X_1, X_2, \ldots, X_n$ 是总体…【1/2, N(1/λ, 1/(nλ²))】

7．设总体…则 $D(S_1^2+S_2^2)=$ ____ 【$\dfrac{2(n_1+n_2-2)}{(n_1-1)(n_2-1)}\sigma^4$.】

二(10 分) 设有 n 个袋子, …

解 1) 本题是 c=1 的 Polya 模型, 故 $X_k \sim \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ b/(r+b) & r/(r+b) \end{pmatrix}$, $k=1,2,\ldots n$

2) $EX_k^2=1$, 而 $r=b$ 时 $EX_k=0, k=1, 2, \ldots, n.$; 由乘法公式, 知

$$P(X_1X_2=1)=P(X_1=1, X_2=1)+P(X_1=-1, X_2=-1)\overset{r=b}{===}\frac{r+1}{2r+1},$$

$$\operatorname{cov}(X_1, X_2)=E(X_1X_2)=P(X_1X_2=1)-P(X_1X_2=-1)=\frac{1}{2r+1}.$$

$$\rho=\frac{\operatorname{cov}(X_1,X_2)}{EX_1^2}=\operatorname{cov}(X_1,X_2)=\frac{1}{2r+1}.$$

三(10 分) 设(X,Y)的 pdf 为

解（1）Y 的边缘密度为 $f_Y(y)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)dx=\lambda e^{-\lambda y}I(y>0)$;

故对 $t>0$，有 $P(Y>t)=\int_t^{\infty}\lambda e^{-\lambda y}dy=e^{-\lambda t}$，从而

$$P(Y>t+s\mid Y>s)=\frac{P(Y>t+s)}{P(Y>s)}=\frac{e^{-\lambda(t+s)}}{e^{-\lambda s}}=e^{-\lambda t}=P(Y>t)$$

（2）$f_X(x)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)dy=\begin{cases}\int_0^x\lambda^2e^{-\lambda x}dy=\lambda^2xe^{-\lambda x} & x>0\\ 0 & x\le 0\end{cases}$;

$$EX=\int_{-\infty}^{\infty}xf_X(x)dx=\int_0^{\infty}x\cdot\lambda^2xe^{-\lambda x}dx=2/\lambda$$

四(12 分) 用两个独立的同类设备

解 记两设备寿命分别为 X 和 Y、系统寿命为 U.

串联 $U=\min\{X, Y\}$. 故 $F_U(t)=1-[1-F_x(t)]^2=1-\exp\{-2\lambda t\}$，$t>0$.

$U \sim \mathrm{Ex}(2\lambda)$, 故 $EU = 1/(2\lambda)$。

并联 $U = \max\{X, Y\}$. 故 $F_U(t) = [F_x(t)]^2 = (1 - \exp\{-\lambda\, t\})^2$，$t>0$.

其 $f_U(u) = 2\lambda\exp\{-\lambda u\}\,[1 - \exp\{-\lambda u\}]$，$u>0$.

$$EU = \mathrm{E}\max\{X, Y\} = \int_0^\infty u f_U(u)du = \int_0^\infty 2\lambda u\, e^{-\lambda u}[1 - e^{-\lambda u}]du = \frac{2}{\lambda} - \frac{1}{2\lambda} = \frac{3}{2\lambda}$$

备用系统 $U = X+Y$. 由Γ-分布参数可加性知 $U \sim \Gamma(2,\lambda)$，所求概率

$F_U(t) = \int_0^t f_U(u)du$, 其中 $f_U(u) = \lambda^2 u \exp\{-\lambda u\}$，$u>0$. $EU = EX + EY = 2/\lambda$.

五(10 分) 设在(s, t] 时段内到某个网站访问的次数

解 (1). $\eta_2 \sim \Gamma(2, \lambda)$, 由 Poisson 流性质, 可写$\eta_2 = X_1 + X_2$, 其中 X_1, X_2 $iid, \sim \mathrm{Ex}(\lambda)$，故

$E\eta_2 = EX_1 + EX_2 = 2/\lambda$

利用切贝雪夫不等式，$P(|\lambda\eta_2 - 2| < \lambda) = P(|\eta_2 - E\eta_2| < 1) \ge 1 - D\eta_2$

$D\eta_2 = DX_1 + DX_2 = 2/\lambda^2$

也可计算并利用 $E\eta_2 = 2/\lambda$,

$$E\eta_2^2 = \int_0^\infty t^2 f_{\eta_2}(t)dt = \int_0^\infty \lambda^2\, t^3 e^{-\lambda t}dt = (3/\lambda)E\eta_2 = 6/\lambda^2$$

$$D\eta_2 = 2/\lambda^2$$

故 $\lambda = 5$ 时 $P(|\lambda\eta_2 - 2| < \lambda) \ge 1 - 2/\lambda^2 = 0.92$, 即所求概率的下限为 0.92.

(2)

$$\begin{aligned} &E(N_t \mid N_s = k) = E(N_s + N_t - N_s \mid N_s = k) = E(k + N_t - N_s \mid N_s = k) \\ &= k + E(N_t - N_s) = k + \lambda(t - s) \end{aligned}.$$

六(10 分) 设 $rv\ X$ 的 df 为

解 当$\alpha = 1$ 时，X 的 pdf 为 $f(x;\beta) = \dfrac{\beta}{x^{\beta+1}} I(x > 1)$

（1）由于 $EX = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x;\beta)dx = \int_1^{+\infty} x \cdot \dfrac{\beta}{x^{\beta+1}}dx = \dfrac{\beta}{\beta - 1}$,

令 $\dfrac{\beta}{\beta - 1} = \overline{X}$, 解得 $\beta = \dfrac{\overline{X}}{\overline{X} - 1}$. 所以， $\hat{\beta}_M = \dfrac{\overline{X}}{\overline{X} - 1}$.

（2）当 $\beta = 2$ 时，对于总体 X 的样本值 $x_1, x_2 \cdots, x_n$，似然函数为

$$L(\alpha) = \prod_{i=1}^n f(x_i;\alpha) = \frac{2^n \alpha^{2n}}{(x_1 x_2 \cdots x_n)^3} I(x_i > \alpha, i = 1,2,\cdots,n)$$

当$\alpha < x_i$, $i = 1,2,\cdots,n$, 时，α越大, $L(\alpha)$越大，因而$\hat{\alpha}_L = \min\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$

则估计量为 $\hat{\alpha}_L = \min\{X_1, X_2, \cdots, X_n\}$

七（12 分）

解 (1) H_0: $\sigma_1{}^2 = \sigma_2{}^2$

选取统计量 $\dfrac{S_1{}^2}{S_2{}^2} \sim F(n_1-1, n_2-1)$,

统计量拒绝域 $\left(0,\ F_{1-\alpha/2}(n_1-1, n_2-1)\right) \bigcup (F_{\alpha/2}(n_2-1, n_1-1), \infty)$

计算统计量观测值 $\dfrac{s_1{}^2}{s_2{}^2} = \dfrac{3.82}{4.02} = 0.9502$,

查表 $F_{0.025}(7,7) = 4.99$,
$F_{1-\alpha/2}(n_1-1, n_2-1) = 1/F_{0.025}(7,7) = 1/4.99 = 0.2004$

统计推断: $\dfrac{s_1{}^2}{s_2{}^2} = 0.9502$ 不在拒绝域内， 故接受 H_0: $\sigma_1{}^2 = \sigma_2{}^2$，认为两总体的方差相等。

（2）利用(1)的推断，认为两总体的方差相等， 故 $\mu_1 - \mu_2$ 置信度为 0.95 的单侧置信下限为 $\overline{X}_1 - \overline{X}_2 - t_{0.05}(n_1+n_2-2)S_w\sqrt{\dfrac{1}{n_1}+\dfrac{1}{n_2}}$,

代入观测值计算 $s_w^2 = (3.82+4.02)/2 = 3.92$

$$\overline{x}_1 - \overline{x}_2 - t_{0.05}(14)s_w\sqrt{\frac{1}{8}+\frac{1}{8}} = -2.02 - 1.7613 \times 1.9799 \times 0.5 = -3.7636$$

所求单侧置信下限为－3.7636。

清华大学本科生考试试题专用纸　（A 卷）

考试课程：概率论与数理统计　　考试时间：2007 年 1 月 10 日 14:30-16:30

姓名 ________　学号 200 0 ________　班级 __________

标准正态分布 $N(0,1)$ 的分布函数值：	x	1.46	1.645	1.96	2	2.46
	$\Phi(x)$	0.928	0.950	0.975	0.977	0.993

一、填空。（每空 2 分，共 38 分。直接将答案填在划线处。如果最终结果用小数表示，请精确到小数点后第 3 位。）

1. 设 $X \sim U(0,1)$。以下判断正确的是 ______________。

   A： "事件 $\{X=0.5\}$ 是不可能事件"；　B： "事件 $\{X=0.5\}$ 是零概率事件"。

2. 设事件 A_1, A_2, A_3 相互独立，且 $P(A_i)=1/3$（$i=1,2,3$）。则这三个事件中至少有一个发生的概率为 ________；这三个事件中恰好有一个发生的概率为 ________。

3. 工厂 A 和工厂 B 的产品次品率分别是 1% 和 2%。现从 A、B 两厂产品各占 60% 和 40% 的一批产品中随机选取一件，则该产品是次品的概率为 ______%。如果发现这个产品是次品，那么它是工厂 A 生产的概率为 ______________。

4. 设随机变量 X 和 Y 均服从 $N(0,1)$，则以下判断正确的是 ____________。

   A： $X+Y$ 服从正态分布；　B： X^2+Y^2 服从 χ^2 分布；

   C： X^2 和 Y^2 都服从 χ^2 分布；　D： X^2/Y^2 服从 F 分布。

5. 某人有 n 把钥匙，其中只有一把能打开自己的家门，他随意地试开。如果他每次把试过的钥匙又混杂进去，则打开门所需试开次数 X 的数学期望为 ______。如果他每次把不能打开的钥匙剔除，则打开门所需试开次数 Y 的数学期望为 ____________。

6. 现有一个容量为 9、来自正态总体 $N(\mu, 0.81)$ 的简单随机样本，其样本均值为 5，则未知参数 μ 的置信水平为 0.95 的置信区间为 ________________________。

7. 设 $x_1, \ldots, x_4$ 为来自正态总体 $N(\mu, 4^2)$ 的简单随机样本，$\overline{x}$ 为样本均值。在显著性水平 $\alpha=0.05$ 下考虑检验问题：$H_0: \mu=5$ vs $H_1: \mu \neq 5$. 其拒绝域为 $\{|\overline{x}-5| \geq k\}$，则 $k=$________。该检验问题在真值 $\mu=6$ 时犯第二类错误的概率为 ________。

8. 设 X, Y 相互独立，$P(X=1)=P(X=2)=1/2$，Y 服从指数分布 $\mathrm{Exp}(1)$。则 XY 的分布函数 $F(z)=$__________________，密度函数 $f(z)=$________________。

9. 设 $X_1, \ldots, X_{100}$ 是来自正态总体 $N(\mu, \mu^2)$（$\mu>0$）的简单随机样本，样本均值为 $\bar{X}$。则 $10(\mu^{-1}\bar{X}-1)$ 服从 ____________________（分布名称及参数）。如果正数 C 满足 $P(\bar{X}/C \geq \mu)=5\%$，则 $C=$_________。

10. 设 $g:[0,1] \to \mathbb{R}$ 连续，记 $A=\int_0^1 g(x)dx$，$B=\int_0^1 [g(x)]^2 dx$，$B \neq A^2$。设 $X_1, X_2, \ldots$

独立，都服从均匀分布 $U[0,1]$ 。则当 $n\to\infty$ 时， $Q_n := \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} g(X_k)$ 依概率收敛于 ______ 。当 n 充分大时， $\sqrt{n}(Q_n - A)$ 的近似分布为 ________（分布名称及参数）。

11. 设 X 的概率密度为 $f(x)=C/x^2$ ， $|x|\ge 1$ 。则常数 $C=$____ 。以下判断中正确的是 ______ 。

A： X 的数学期望存在且等于零； B： X 不存在数学期望。

二、（8 分）一生产线生产的产品成箱包装，每箱的重量是随机的。设每箱的平均重量为 50 公斤，标准差为 5 公斤。若用最大载重量为 5000 公斤的汽车承运，试用中心极限定理说明每辆车最多可以装多少箱，才能保证不超载的概率大于 0.977 ？

三、（16 分，每问 4 分）独立重复掷一枚硬币，每次抛掷得到正面的概率为 $0<p<1$ ，到第 X 次掷币时首次得到正面，到第 Y 次掷币时刚好得到累计两次正面。

1. 求 X,Y 的联合概率分布列以及边缘概率分布列；
2. 求在已知 $X=k$ 的条件下， $Y-X$ 的条件分布列；并判断 $X, Y-X$ 是否独立；
3. 求 EX 和 EY ；
4. 求 X,Y 的相关系数。

四、（18 分，每问 3 分）设二维随机向量 (X,Y) 的联合概率密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases} C(x+y), & 若 0<x<1 且 0<y<1; \\ 0, & 否则. \end{cases}$$

1. 求 C 的值；
2. 求 X 和 Y 的边缘概率密度函数，并判断 X,Y 是否独立；
3. 求 $E(X^mY^n)$ ，其中 m,n 是非负整数；
4. 求使得 $E(Y-aX)^2$ 达到最小值时的 a 值；
5. 求条件期望 $E(Y|X)$ ；
6. 求 $U=X+Y, V=X-Y$ 的联合概率密度函数。

五、（20 分，每问 4 分）设 $X_1,\dots,X_n$ 是来自总体 $U(-\sqrt{\theta},\sqrt{\theta})$ 的简单随机样本，其中 $\theta>0$ 是未知参数。

1. 求 θ 的矩估计量 $\hat{\theta}_1$ ，以及当样本容量 $n\to\infty$ 时 $\hat{\theta}_1$ 的渐近分布；
2. 求 θ 的极大似然估计量 $\hat{\theta}_2$ ；
3. 求常数 c_1,c_2 使得 $\eta_1=c_1\hat{\theta}_1$ 和 $\eta_2=c_2\hat{\theta}_2$ 均为 θ 的无偏估计；
4. 上述两个无偏估计 η_1 和 η_2 中，哪一个更有效性？
5. 问： $\hat{\theta}_1$ 和 $\hat{\theta}_2$ 是不是 θ 的相合估计？为什么？

2006-2007 学年秋季学期概率论与数理统计

试题答案和评分标准

AB 一、填空。

题号	答案	题号	答案
A1	B	B1	B
A2	19/27， 4/9	B2	19/27， 4/9
A3	1.4， 3/7	B3	1.4， 3/7
A4	C	B4	3.92， 0.921
A5	n， $(n+1)/2$	B5	$1-(e^{-z}+e^{-z/2})/2, z>0$， $(e^{-z}+e^{-z/2})/2, z>0$
A6	$[4.412, 5.588]$	B6	$N(0,1)$， 1.1645
A7	3.92， 0.921	B7	C
A8	$1-(e^{-z}+e^{-z/2})/2, z>0$， $(e^{-z}+e^{-z/2})/2, z>0$	B8	n， $(n+1)/2$
A9	$N(0,1)$， 1.1645	B9	$[4.412, 5.588]$
A10	A， $N(0, B-A^2)$	B10	A， $N(0, B-A^2)$
A11	$1/2$， B	B11	$1/2$， B

AB 二 设 $X_1,\dots,X_n$ 是各箱重量，它们独立同分布，不超载的概率为

$$P(X_1+\cdots+X_n\le 5000)\ge 0.977=\Phi(2).$$

由中心极限定理知对充分大的 n，

$$P\left(\frac{X_1+\cdots+X_n-n\mu}{\sigma\sqrt{n}}\le\frac{5000-50n}{5\sqrt{n}}\right)\approx\Phi\left(\frac{5000-50n}{5\sqrt{n}}\right),$$

其中， $\mu=EX_1=50$ 公斤， $\sigma=\sqrt{DX_1}=5$ 公斤。因此，当

$$\frac{5000-50n}{5\sqrt{n}}>2,$$

即

$$25n^2-5001n+25\times10^4>0,\qquad 5000-500n>0,$$

即

$$n<\frac{5001-\sqrt{5001^2-4\times25^2\times10^4}}{50}=\frac{5001-\sqrt{5001+5000}}{50}\approx\frac{5001-100}{50}=98.02,$$

即 $n\le 98$ 时，不超载的概率大于 0.977 。

A 三 B 四 (1) X 服从几何分布 $G(p)$，分布列为

$$P(X=k)=pq^{k-1},\qquad k=1,2,\ldots.$$

Y 的概率分布列为

$$P(Y=n)=C_{n-1}^{1}p^2q^{n-2}=(n-1)p^2q^{n-2},\qquad n=2,3,\ldots.$$

联合概率分布为

$$P(X=k,Y=n)=p^2q^{n-2},\qquad k=1,2,\ldots,n-1;n=2,3,\ldots.$$

(2)

$$P(Y-X=n|X=k)=\frac{P(X=k,Y=n+k)}{P(X=k)}=\frac{p^2q^{n+k-2}}{pq^{k-1}}=pq^{n-1}.$$

即在已知 $X=k$ 发生的条件下， $Y-X$ 服从几何分布 $G(p)$ 。
(3) 由 (2) 知， $X=k$ 时 $Y-X$ 的条件分布与 k 无关，所以 $Y-X$ 与 X 独立。

$$P(X=k,Y-X=n)=P(X=k,Y=n+k)=p^2q^{n+k-2}=pq^{k-1}\cdot pq^{n-1},\quad \forall k,n\geq 1,$$

所以 X 与 $Y-X$ 独立。
(4)

$$EX=\sum_{k=1}^{\infty}kpq^{k-1}=\frac{1}{p},$$
$$EY=EX+E(Y-X)=\frac{2}{p}.$$

(5)

$$\begin{aligned}DX&=EX(X-1)+EX-(EX)^2=\sum_{k=1}^{\infty}k(k-1)pq^{k-1}+\frac{1}{p}-\frac{1}{p^2}\\&=\frac{2pq}{p^3}+\frac{1}{p}-\frac{1}{p^2}=\frac{q}{p^2},\\DY&=D[X+(Y-X)]=DX+D(Y-X)=\frac{2q}{p^2},\\\mathrm{Cov}(X,Y)&=\mathrm{Cov}(X,X)+\mathrm{Cov}(X,Y-X)=DX=\frac{q}{p^2},\end{aligned}$$

于是

$$r_{X,Y}=\frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sqrt{DX\cdot DY}}=\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

A 四 B 三 (1)

$$1=\int_0^1\int_0^1 C(x+y)dxdy=2C\int_0^1 xdx\int_0^1 dy=C.$$

(2)

$$f_X(x)=\int_0^1 C(x+y)dy=C\left(x+\frac{1}{2}\right)=x+\frac{1}{2},\quad 0<x<1.$$

同理,

$$f_Y(y)=y+\frac{1}{2},\quad 0<y<1,$$

X,Y 不独立。

(3)

$$\begin{aligned}E(X^mY^n)&=\int_0^1\int_0^1 x^m y^n f(x,y)dxdy=\int_0^1\int_0^1 x^{m+1}y^n+x^my^{n+1}dxdy\\&=\frac{1}{(m+2)(n+1)}+\frac{1}{(m+1)(n+2)}=\frac{2mn+3(m+n)+4}{(m+1)(m+2)(n+1)(n+2)},\end{aligned}$$

(4) 由 (3) 知 $EX^2=EY^2=\frac{1}{4}+\frac{1}{6}=\frac{5}{12}$， $E(XY)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$，

$$E(Y-aX)^2=a^2EX^2-2aE(XY)+EY^2=\frac{5}{12}a^2-\frac{2}{3}a+\frac{5}{12}=\frac{5}{12}(a-4/5)^2+\frac{3}{20}$$

在 $a=4/5$ 时达到最小值 3/20 。

(5) 条件密度函数

$$f_{Y|X}(y|x)=\frac{x+y}{x+1/2},\qquad 0<y<1,0<x<1.$$

因此条件期望

$$E(Y|X=x)=\int_0^1 yf_{Y|X}(y|x)dy=\frac{x}{2x+1}+\frac{1}{3x+3/2}=\frac{3x+2}{6x+3}.$$

从而

$$E(Y|X)=\frac{3X+2}{6X+3}.$$

(6)

$$f_{U,V}(u,v)=f_{X,Y}\left(\frac{u+v}{2},\frac{u-v}{2}\right)\frac{1}{2}=\frac{u}{2}I_{0<u+v<2,0<u-v<2}.$$

AB 五 (1) 由

$$EX=0,\quad EX^2=DX=\frac{(2\sqrt{\theta})^2}{12}=\frac{\theta}{3},$$

得到 θ 的矩估计为

$$\hat{\theta}_1=\frac{3}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2,$$

再由

$$EX^4=\int_{-\sqrt{\theta}}^{\sqrt{\theta}}\frac{x^4}{2\sqrt{\theta}}dx=\frac{\theta^2}{5},\qquad D(X^2)=\frac{\theta^2}{5}-\frac{\theta^2}{9}=\frac{4\theta^2}{45},$$

及中心极限定理，得到渐近分布 $N\left(\theta,\frac{4\theta^2}{5n}\right)$ 。

(2) 似然函数

$$L(\theta)=\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{2\sqrt{\theta}}I_{|x_i|<\sqrt{\theta}}=\frac{1}{2^n\theta^{n/2}}I_{\max\limits_{1\le i\le n}x_i^2<\theta},$$

因其单调性，在 $\max\limits_{1\le i\le n}x_i^2$ 处取最大值，因此

$$\hat{\theta}_2=\max_{1\le i\le n}X_i^2$$

是 θ 的极大似然估计。

(3)

$$F_{\hat{\theta}_2/\theta}(t)=P(\max_{1\le i\le n}X_i^2\le t\theta)=\left[P(|X_1|\le\sqrt{t\theta})\right]^n=\left(\frac{2\sqrt{t\theta}}{2\sqrt{\theta}}\right)^n=t^{n/2},\quad 0<t<1;$$

$$f_{\hat{\theta}_2/\theta}(t)=\frac{n}{2}t^{\frac{n}{2}-1},\quad 0<t<1.$$

(4) 由

$$E\hat{\theta}_1=3EX^2=\theta,\quad E\hat{\theta}_2=\theta\int_0^1 tf_{\hat{\theta}_2/\theta}(t)dt=\frac{n\theta}{n+2}\int_0^1\frac{n+2}{2}t^{\frac{n+2}{2}-1}dt=\frac{n\theta}{n+2},$$

得 θ 的两个无偏估计： $\hat{\theta}_1$ 和 $\frac{n+2}{n}\hat{\theta}_2$ ，它们的方差为

$$D\hat{\theta}_1=E(\hat{\theta}_1-\theta)^2=\frac{9}{n}D(X^2)=\frac{4\theta^2}{5n}.$$

$$\begin{aligned}D\left(\frac{n+2}{n}\hat{\theta}_2\right)&=\theta^2\int_0^1\left(\frac{(n+2)}{n}t-1\right)^2\frac{n}{2}t^{\frac{n}{2}-1}dt\\&=\theta^2\left(\frac{(n+2)^2}{n(n+4)}\int_0^1\frac{n+4}{2}t^{\frac{n+4}{2}-1}dt-2\int_0^1\frac{n+2}{2}t^{\frac{n+2}{2}-1}dt+\int_0^1\frac{n}{2}t^{\frac{n}{2}-1}dt\right)\\&=\theta^2\left(\frac{(n+2)^2}{n(n+4)}-1\right)=\frac{4\theta^2}{n(n+4)},\end{aligned}$$

后者比前者有效。

(5) 根据大数定律或 (1) 中的渐近分布， $\hat{\theta}_1$ 是 θ 的相合估计。

由

$$P(|\hat{\theta}_2-\theta|\le\varepsilon)=P(\theta-\varepsilon<\hat{\theta}_2<\theta)=\int_{\theta-\varepsilon}^{\theta}\frac{n}{2\theta}\left(\frac{t}{\theta}\right)^{\frac{n}{2}-1}dt=1-\left(\frac{\theta-\varepsilon}{\theta}\right)^{\frac{n}{2}}\xrightarrow[n\to\infty]{}1$$

知 $\hat{\theta}_2$ 是 θ 的相合估计。

也可以这样：当 $n>4\theta/\varepsilon-2$ 时

$$|E\hat{\theta}_2-\theta|=\frac{2\theta}{n+2}<\frac{\varepsilon}{2},$$

于是

$$P(|\hat{\theta}_2-\theta|>\varepsilon)\le P(|\hat{\theta}_2-E\hat{\theta}_2|>\frac{\varepsilon}{2})\le\frac{4}{\varepsilon^2}D\hat{\theta}_2,$$

而

$$D\hat{\theta}_2=E(\hat{\theta}_2-\theta)^2-(E\hat{\theta}_2-\theta)^2=\frac{4n\theta^2}{(n+4)(n+2)^2}\xrightarrow[n\to\infty]{}0,$$

所以 $\hat{\theta}_2$ 是 θ 的相合估计。

清华大学本科生考试试题专用纸

卷 **A**　　考试课程　　概率论与数理统计　　　　　　　2007　年　6 月 25 日

记号：~服从；　:= 记为；　*iid* 独立同分布；　*df* 分布函数；　*pdf* 分布密度函数；

rv 随机变量；$r\vec{v}$ 随机向量；　B(n, *p*)二项分布；　P(λ) Poisson 分布；

Ge(*p*) 几何分布；　　Ex(λ) 指数分布；　U(a,b)均匀分布；　N(μ,σ^2)正态分布。

一(36 分)填空与判断正误（正确时填√，错误时填×；填入的分布必须带参数）

1. 设事件 A，B 满足 0<P(B)<1，P(A|B)=P(A|$\overline{B}$)，则必有事件 A 与 B 相互独立（　　）；

此时如令

$$X=\begin{cases}1 & \text{如果A发生}\\ -1 & \text{反之}\end{cases},\quad Y=\begin{cases}1 & \text{如果B发生}\\ -1 & \text{反之}\end{cases}$$

则一定有$P(X=-1|Y=-1)=P(X=-1)$　（　　　）

2. 已知$P(\overline{A})=0.3$，$P(B)=0.4$，$P(\overline{B}A)=0.5$，则$P\big(B\big|(A\cup\overline{B})\big)$=________，此时 A 和 B 独立（　　　）

3. 有一批同型号产品，已知其中由一廠生产的占 30%，二廠生产的占 50%，三廠生产的占 20%，又知这三个廠产品的次品率分别为 2%、1%和 1%。问从这批产品中任取一件是次品的概率等于___________

4. 设$(X_1,X_2)\sim N(0,0,\sigma^2,\sigma^2,0.5)$，令$Y_1=X_1-X_2$，$Y_2=X_1+X_2$，则$P(X_1<X_2)$=___________；

Y_1和Y_2不独立（　　），又如果$\sigma^2=1$，此时$f_{X_2|X_1}(1|0)$=___________

5. 设 rv X 和 Y *iid*，如 X~$U_{[0,2]}$，则 P{max{X,Y}≤1}=___________

6. 设总体 X 的 *pdf* 为$f_X(x)=\frac{1}{2}e^{-|x|},-\infty<x<\infty$，$X_1,X_2,\ldots,X_n$ 为总体的简单随机样本，样本均值为$\overline{X}$，则 D$\overline{X}$=____________

7. 设某产品的寿命 X 的 *pdf* 为$f(x)=\begin{cases}0 & x\le 1\\ \lambda e^{-\lambda(x-1)} & x>1\end{cases}$，这里$\lambda$是未知参数。又设

$X_1,X_2,\ldots,X_n$ 为该总体 X 的简单样本，则λ的矩估计量$\hat{\lambda}_M$=__________，而极大似然估计量$\hat{\lambda}_L$=_________。

二(8 分) 设 rv $X_k = 2\sin(\omega_0 k+\Theta)$，k=1,2，其中$\omega_0$是常数，rv$\Theta \sim U_{[-\pi,\pi]}$，求

(1) EX_k (2) ω_0取何值时 X_1 和 X_2 不相关？

三(8 分) 设 rv X 和 Y 独立，且 X~U[0,2]，Y~U[0,1]，求 U=X+Y 的分布.求 DZ，其中 rv Z 如下定义：$Z=\begin{cases}1 & X>Y\\ -1 & X\le Y\end{cases}$.

四(10 分)设 $X_1, X_2, \ldots, X_n$，n>2，独立同分布，~N(μ,σ^2)

(1) 求 X_1-X_2 与 X_1 的相关系数 r

(2) 写出 $X_1-\overline{X}$ 的 pdf，并求 D($|X_1-\overline{X}|$)，其中 $\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k$

五(8 分) 设总体 X 的 pdf 为 $f(x,\theta)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\theta} & 0<x<\theta\\ \dfrac{1}{2(1-\theta)} & \theta\le x<1\\ 0 & \text{else}\end{cases}$。$X_1, X_2, \ldots, X_n$ 是来自总体 X 的简单样本。求参数θ的矩估计量$\hat{\theta}$；它是否为θ的无偏估计？说明理由。

六(10 分) 在计算机上作大型科学计算，需对十进制的x_j的小数点后第 6 位作四舍五入，得到x_j的近似数y_j，则认为随机误差$\varepsilon_j = x_j - y_j$在区间($-0.5\times10^{-5}$, 0.5×10^{-5})内均匀分布，累积误差为$\eta_n=\sum_{j=1}^{n}\varepsilon_j$。试求

(1)用切贝雪夫不等式估计，当 n=10000 时给出$|\eta_n|$不超过 0.0005 的概率的上界；

(2)用中心极限定理，n=10000 时，以 99.7%以上的把握给出$|\eta_n|$的近似估计（估计上界）。

七(20 分) 设冶炼厂的某项污染指标 X~ N(μ,σ^2)，σ^2未知，$x_1,x_2,\ldots,x_9$是此正态总体的大小为 9 的简单样本的观测值，测得$\overline{x}=3.64$，s^2=0.64.

(1) 求 $X_1,X_2,\ldots,X_9$ 中恰有 2 个小于该总体 X 的期望的概率 p

(2) 问 μ 是否明显低于 μ_0=4.00（取显著性水平 α=0.05）？

附表 $z_{0.05}$=1.64, $z_{0.025}$=1.96

$\chi^2_\alpha(n)$	n=8	n=9	$\chi^2_\alpha(n)$	n=8	n=9	$t_\alpha(n)$	n=8	n=9
α=0.95	2.733	3.325	α=0.05	15.507	16.919	α=0.05	1.8595	1.8331
α=0.975	2.180	2.700	α=0.025	17.535	19.023	α=0.025	2.3060	2.2622

参考答案

一. 1. √，√

2. 0.25，×

3. 1.3%

4. 1/2，×，$\sqrt{\frac{2}{3\pi}}e^{\frac{-2}{3}}$

5. 1/4

6. 2/n

7. $\frac{1}{\bar{X}-1}$，$\frac{1}{\bar{X}-1}$

二. $EX_k = 0$ ， $\omega_0 = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$或$2k\pi + 2\pi - \frac{\pi}{2}$

三. (1) $$F_U(u) = \begin{cases} 0 & u \le 0 \\ \frac{1}{4}u^2 & 0 < u \le 1 \\ \frac{1}{2}u - \frac{1}{4} & 1 < u \le 2 \\ 1 - \frac{1}{2}(3-u)^2 & 2 < u \le 3 \\ 1 & u \ge 3 \end{cases}$$

(2) $EZ = P(Z=1) - P(Z=-1) = \frac{3}{4} - \frac{1}{3} = \frac{1}{2}$，$EZ^2 = 1$

故$DZ = EZ^2 - (EZ)^2 = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$

四. (1) $r = \frac{\sqrt{2}}{2}$

(2) $X_1 - \bar{X} \sim N\left(0, \frac{n-1}{n}\sigma^2\right)$，故$D(|X_1 - \bar{X}|) = \frac{n-1}{n}\sigma^2$

五. $\hat{\theta} = \frac{4\bar{X}-1}{2}$，是无偏估计

六. (1) $P(|\eta_n| < 0.0005) \ge \frac{2}{3}$

(2) 由中心极限定理：$\zeta_n \overset{\text{def}}{=} \frac{\sum_{j=1}^{n}(\varepsilon_j - 0)}{\sqrt{n}\,D\varepsilon_j} \sim N(0,1)$，所以$\eta_n \sim N(0,\sigma^2)$，其中$\sigma = \frac{1}{12} \times 10^{-8}$

设上界为 c，

则$P(|\eta_n| < c) = P(-c < \eta_n < c) = 99.7\%$

$\therefore c = 3\sigma = 2.5 \times 10^{-7}$

七. (1) $C_9^2\left(\frac{1}{2}\right)^9 = \frac{36}{2^9} = \frac{9}{2^7}$

(2) 是。

3

清华大学本科生考试试题专用纸

考试课程：概率论与数理统计　考试时间：2009 年 6 月 18 日

A

姓名____________学号 200__________班级________.

一、填空题（20 分，每空 2 分）

1. 若事件 A 、B 独立，则以下命题不正确的是__________。

(A) A 与 $\overline{B}$ 一定独立　(B) $\overline{A}$ 与 $\overline{B}$ 一定独立　(C) AB 与 $\overline{AB}$ 一定独立

2. 若随机变量 X 的分布函数连续，则____________。

(A) X 一定为离散型　(B) X 一定为连续型　(C) 以上选项都不对

3. 如果随机变量 X 的期望存在，$P(X<-2)=0.3$，$P(X>4)=0.4$，则_________。

(A) $|EX|=E|X|$　(B) $|EX|>E|X|$　(C) $|EX|<E|X|$　(D) 条件不足无法判断

4. $x_1,x_2,\cdots,x_n\ (n>1)$ 是来自正态总体 $N(\mu,\sigma^2)$ 的简单随机样本，

$\bar{x}=\dfrac{x_1+x_2+\cdots x_n}{n}$，$s=\sqrt{\dfrac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n}(x_k-\bar{x})^2}$。则下列关系正确的是____________。

(A) $E(s)>\sigma$　(B) $E(s)<\sigma$　(C) $E(s)=\sigma$　(D) 不确定

5. 随机变量 X 服从几何分布 $Ge(0.25)$，则 $E(X|X\geq 4)=$______________。

6. 二维随机变量 $(X,Y)\sim N(0,0,1,1/4,1/3)$，设 $U=X-2Y$ 和 $V=X+2Y$，则 U,V _________（填“独立”或“不独立”），$E(U^2|V=0)=$________________。

7. 设随机变量 $X\sim N(0,1)$，则随机变量 $Y=\dfrac{|X|}{2}$ 的概率密度函数 $p_Y(y)=$_________________。

8. $x_1,x_2,\cdots,x_{25}$ 是来自正态总体 $N(\mu,4)$ 的简单随机样本，$\bar{x}$ 是样本均值。对假设检验问题 $H_0:\mu\geq 3$ VS $H_1:\mu<3$。若取拒绝域为 $\bar{x}<2.487$，则检验的显著性水平为___________，当 $\mu=1.91$ 时，该检验犯第二类错误（受伪）的概率＝______________。

二、（14 分）盒中共有 5 个乒乓球，都是新球，每场比赛从中任取 1 个使用，比赛后仍放回盒中。

1. 求第 3 场比赛用球在前两场比赛都未使用过的概率；
2. 如果已知第 3 场比赛用球在前两场比赛都未使用过，求第 3 场比赛前盒中恰有 4 个球尚未使用过的概率。

三、（24 分）设 X、Y 独立同分布，都服从期望为 1 的指数分布，令 $U=\max(X,Y)$，$V=\min(X,Y)$。

1. 求 (U,V) 的联合概率密度函数；
2. 求 U、V 的期望和相关系数；
3. 证明：$U-V$ 和 V ~~相互独立~~。

四、(18分) 设 $X_1, X_2, \cdots, X_{2n}$ 相互独立，且均服从均匀分布 $U(0,1)$，定义随机变量

$$Y_k = \begin{cases} 4, & X_{2k-1}^2 + X_{2k}^2 < 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}, \quad k = 1,2,\cdots,n。$$

1. 对于任意给定的正整数 n，证明随机变量 $\overline{Y} = \dfrac{Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_n}{n}$ 是期望等于 π；
2. 试用中心极限定理估计，当 $n = 400$ 时，$\overline{Y}$ 与 π 的绝对误差 $|\pi - \overline{Y}|$ 不大于 0.1 的概率（结果用标准正态分布函数 $\Phi(\cdot)$ 表示）；
3. 利用 Chebyshev 不等式估计，n 取多大时能够保证有 90% 以上的把握使 $|\pi - \overline{Y}|$ 不超过 0.1?

五、(12分) 设总体 X 的概率密度函数为 $p(x;\mu) = \begin{cases} 2(\mu+1-x), & \mu \le x \le \mu+1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$，其中 μ 是未知参数，$x_1, x_2, \cdots, x_n$ 是来自该总体的简单随机样本。

1. 求参数 μ 的矩估计量 $\hat{\mu}_1$ 和极大似然估计量 $\hat{\mu}_2$；
2. 问 $\hat{\mu}_1$ 和 $\hat{\mu}_2$ 是否为参数 μ 的无偏估计量，如果估计量有偏，则将其修正为无偏估计量。

六、(12分) 设某企业的每日赢利（单位：万元）服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$。

1. 如果方差 $\sigma^2 = 9$，对期望作置信度 95% 的双侧对称置信区间估计，欲使置信区间的长度不超过 2，至少应该取容量多大的样本？
2. 如果方差未知，随机抽测 9 日，得数据的均值和标准差分别为 40.5 万元和 1.2 万元. 依据抽测数据. 试以 95% 的把握估计最小平均赢利。

附表

	$\chi^2_{0.025}(n)$	$\chi^2_{0.05}(n)$	$\chi^2_{0.95}(n)$	$\chi^2_{0.975}(n)$	$t_{0.95}(n)$	$t_{0.975}(n)$
$n=8$	2.180	2.733	15.507	17.535	1.8595	2.3060
$n=9$	2.700	3.325	16.919	19.023	1.8331	2.2622

x	1.282	1.440	1.645	1.960	2.326
标准正态分布的分布函数 $\Phi(x)$	0.900	0.925	0.950	0.975	0.990

- 2 -

清华大学本科生考试试题专用纸

考试课程：概率论与数理统计　考试时间：2010 年 1 月 18 日

A

姓名____________学号 200__________班级________.

一、选择题（10 分，每空 2 分，将选项对应的大写英文字母直接写在横线上）

1. 若事件 A,B 独立，$P(A)>0, P(B)>0$，则 $A,B,A\cup B$ 相互独立的充要条件是__________。

   (A) $P(A\cup B)=1$　(B) $A\cup B=\Omega$　(C) 以上选项都不对.

2. 对正态总体的均值进行假设检验，如果在显著性水平 $\alpha=0.05$ 下，接受原假设 $H_0:\mu=\mu_0$，则在显著性水平 $\alpha=0.01$ 下，下列结论中正确的是________。

   (A) 必接受 H_0　(B) 必拒绝 H_0　(C) 可能接受，也可能拒绝 H_0.

3. 如果随机变量 X,Y 具有相同的概率分布，则下列结论中必然正确的是________。

   (A) $P(X=Y)=1$　(B) X,Y 具有相同的中位数　(C) X,Y 具有相同的数学期望.

4. 设 A,B,C 都是正概率事件，A,B 互不相容，则以下两个等式中______总成立。

   (A) $P(C|A\cup B)=P(C|A)+P(C|B)$　(B) $P(A\cup B|C)=P(A|C)+P(B|C)$.

5. 设 X_i 服从 $B(1,p_i)$，$0<p_i<1,(i=1,2)$。则"X_1,X_2 独立"是"X_1,X_2 不相关"的 C 条件。

   (A) 充分但不必要　(B) 必要但不充分　(C) 充分而且必要.

二、填空题（15 分，每空 3 分，将计算结果直接写在横线上）

6. 设随机变量 X,Y 均服从正态分布 $N(0,\sigma^2)$，且 $P(X\le 0,Y>0)=0.3$，则 $P(X>0,Y<0)$=______。

7. 设随机变量 X 与 Y 相互独立，均服从 $[0,1]$ 上的均匀分布，则 $P(|X-Y|>0.5)=$________。

8. 随机变量 X 服从几何分布 $Ge(p)$，则 $P(X=4|X>3)=$______________。

9. 设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自参数为 2 的 Poisson 总体的简单随机样本，令 $B_n^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2$，则 $EB_n^2=$___________。

10. 设 X 的概率密度函数为 $f_X(x)=\lambda e^{-a\lambda|x|}$，$-\infty<x<\infty, \lambda>0$，则正常数 $a=$_______。

概率论与数理统计 2009-2010 秋季学期 期末试卷 A 卷 第 1 页，共 2 页

三、(15 分) 连续做某项试验，每次试验只有成功和失败两种结果，而且第 $k+1$ 次试验的结果只与第 k 次试验结果有关：当第 k 次试验成功时，第 $k+1$ 次试验成功的概率为 2/3 ；当第 k 次试验失败时，第 $k+1$ 次试验成功的概率为 1/6 。已知第 1 次试验成功的概率为 1/3 。

(1) 求第 2 次试验成功的概率，第 k 次试验成功的概率；

(2) 在已知第 3 次试验成功的条件下，求第 2 次试验成功的概率；

(3) 用 X 表示首次获得成功时的试验次数，求 X 的概率分布。

四、(20 分) 设相互独立的随机变量 X_i 分别服从参数为 $\mu_i > 0\ (i=1,2)$ 的指数分布，记

$$X=\min(X_1,X_2)，\ I=\begin{cases}1, & X_1<X_2,\\ 0, & X_1\ge X_2.\end{cases}$$

(1) 求 X 的概率分布函数；

(2) 求 $P(X_1<X_2)$；

(3) 求 $E(X_1\mid X_1<X_2)$；

(4) 试证明 I 与 X 相互独立。

五、(15 分) 设 X 服从均匀分布 $U(0,1)$，Y 服从指数分布 $Exp(1)$，而且它们相互独立。

(1) 证明 $Z=-\ln X$ 服从指数分布 $Exp(1)$。

(2) 求 $X+Y$ 的概率密度函数。

(3) 证明 $P(Y\le 1\mid X\le e^{\frac{-(Y-1)^2}{2}})=2\Phi(1)-1$，其中 $\Phi(x)$ 是标准正态分布 $N(0,1)$ 的概率分布函数。

六、(13 分) 设总体 X 的概率密度函数为 $f(x)=\dfrac{1}{\lambda}e^{-\frac{(x-1)}{\lambda}}$，$x\ge 1$，其中 $\lambda(>0)$ 是未知参数。设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为来自该总体的简单随机样本，$\overline{X}$ 和 S^2 分别是其样本均值和样本方差。

(1) 求 λ 的矩估计 $\hat{\lambda}_M$， 并判断它是否为 λ 的无偏估计，说明道理。

(2) 求 $E(S^2)$ 及 n 足够大时 $\overline{X}$ 的近似分布。

七、(12 分) 对总体 $N(\mu,\sigma^2)$ (参数均未知)的简单随机样本，$n=9$，测得样本均值 $\bar{x}=7.68$，样本方差 $s^2=0.64$。

(1) 试写出 μ 的置信度 95% 的置信下限（不需计算）；

(2) 在显著性水平 $\alpha=0.05$ 下作关于 $H_0:\mu\ge 8$ 的假设检验。

附表 $\Phi(x)$ 是标准正态分布 $N(0,1)$ 的概率分布函数。

$\Phi(1.282)=0.9$, $\Phi(1.440)=0.925$, $\Phi(1.645)=0.95$, $\Phi(1.960)=0.975$, $\Phi(2.326)=0.99$

上侧分位数	$\chi^2_{0.975}(n)$	$\chi^2_{0.95}(n)$	$\chi^2_{0.05}(n)$	$\chi^2_{0.025}(n)$	$t_{0.05}(n)$	$t_{0.025}(n)$
$n=8$	2.180	2.733	15.507	17.535	1.860	2.306
$n=9$	2.700	3.325	16.919	19.023	1.833	2.262

2009-2010 秋季学期概率论与数理统计期末考试参考答案和评分细则

一、选择题（10 分，每空 2 分，将选项对应的大写英文字母直接写在横线上）

题号	1	2	3	4	5
A 卷	A	A	B	B	C
B 卷	B	C	A	A	B

二、填空题（15 分，每空 3 分，将计算结果直接写在横线上）

题号	6	7	8	9	10
A 卷	0.3	0.25	p	$2(n-1)/n$	2
B 卷	p	$2(n-1)/n$	2	0.3	0.25

注：A9B7 也写成以下形式之一：$2-\dfrac{2}{n}$，$2\left(1-\dfrac{1}{n}\right)$，$\dfrac{\lambda(n-1)}{n}$，$\lambda-\dfrac{\lambda}{n}$，$\lambda\left(1-\dfrac{1}{n}\right)$

三、（15 分）

(1) 记 A_k 表示事件“第 k 次试验成功”。则

$$P\left(A_{k+1}\middle|A_k\right)=\frac{2}{3},\quad P\left(A_{k+1}\middle|\overline{A_k}\right)=\frac{1}{6}$$

于是

$$P\left(A_{k+1}\right)=P\left(A_k\right)P\left(A_{k+1}\middle|A_k\right)+P\left(\overline{A_k}\right)P\left(A_{k+1}\middle|\overline{A_k}\right)=P\left(A_k\right)\times\frac{2}{3}+\left(1-P\left(A_k\right)\right)\times\frac{1}{6}$$

$$=\frac{1}{6}+P\left(A_k\right)\times\frac{1}{2}$$

因此

$$P\left(A_2\right)=\frac{1}{6}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{3}$$

利用上述递推关系及数学归纳法可以证明对任意正整数 k，$P\left(A_k\right)=\dfrac{1}{3}$

(2)

$$P\left(A_2\middle|A_3\right)=\frac{P(A_2A_3)}{P(A_3)}$$

$$=\frac{P(A_2)P\left(A_3\middle|A_2\right)}{P(A_3)}$$

$$=P\left(A_3\middle|A_2\right)=\frac{2}{3}$$

(3) $P\left(X=1\right)=P(A_1)=\dfrac{1}{3}$ ；

当 $k>1$ 时，

$$
\begin{aligned}
P(X=k) &= P\left(\overline{A_1}\,\overline{A_2}\cdots\overline{A_{k-1}}A_k\right) \\
&= P\left(\overline{A_1}\right)P\left(\overline{A_2}\middle|\overline{A_1}\right)\cdots P\left(\overline{A_{k-1}}\middle|\overline{A_1}\,\overline{A_2}\cdots\overline{A_{k-2}}\right)P\left(A_k\middle|\overline{A_1}\,\overline{A_2}\cdots\overline{A_{k-1}}\right) \\
&= P\left(\overline{A_1}\right)P\left(\overline{A_2}\middle|\overline{A_1}\right)\cdots P\left(\overline{A_{k-1}}\middle|\overline{A_{k-2}}\right)P\left(A_k\middle|\overline{A_{k-1}}\right) \\
&= \frac{2}{3}\times\left(\frac{5}{6}\right)^{k-2}\times\frac{1}{6}=\frac{1}{9}\times\left(\frac{5}{6}\right)^{k}
\end{aligned}
$$

A 四(B 五)、(20 分)

(1)

$$
\begin{aligned}
F_X(t) &= P\left(X\le t\right) \\
&= 1-P\left(X>t\right) \\
&= 1-P\left(X_1>t, X_2>t\right) \\
&= 1-P\left(X_1>t\right)P\left(X_2>t\right) \\
&= 1-e^{-(\mu_1+\mu_2)t},\ \ (t\ge 0)
\end{aligned}
$$

即 X 服从指数分布 $Exp(\mu_1+\mu_2)$。

(2)

解法 1：

$$
\begin{aligned}
P\left(X_1<X_2\right) &= \iint\limits_{x<y} f_{X,Y}(x,y)dxdy \\
&= \int_0^{+\infty}\int_x^{+\infty}\mu_1 e^{-\mu_1 x}\mu_2 e^{-\mu_2 y}dydx \\
&= \frac{\mu_1}{\mu_1+\mu_2}\int_0^{+\infty}(\mu_1+\mu_2)e^{-(\mu_1+\mu_2)x}\int_x^{+\infty}\mu_2 e^{-\mu_2(y-x)}dydx \\
&= \frac{\mu_1}{\mu_1+\mu_2}
\end{aligned}
$$

解法 2：

令 $\begin{cases} U=X_1-X_2 \\ V=X_2 \end{cases}$。故

$$
p_{U,V}(u,v)=\mu_1 e^{-\mu_1(u+v)}1_{u+v>0}\cdot\mu_2 e^{-\mu_2 v}1_{v>0}
$$

进而，

$$
p_U(u)=\int_{\max(0,-u)}^{+\infty}\mu_1\mu_2 e^{-\mu_1 u}e^{-(\mu_1+\mu_2)v}dv=\begin{cases}\dfrac{\mu_1\mu_2}{\mu_1+\mu_2}e^{-\mu_1 u}, & u>0; \\ \dfrac{\mu_1\mu_2}{\mu_1+\mu_2}e^{\mu_2 u}, & u<0.\end{cases}
$$

因此

$$P\left(X_1<X_2\right)=P(U<0)=\int_{-\infty}^{0}\frac{\mu_1\mu_2}{\mu_1+\mu_2}e^{\mu_2 v}dv$$

$$=\frac{\mu_1}{\mu_1+\mu_2}$$

解法 3：

令 $\begin{cases}W=X_1/X_2\\V=X_2\end{cases}$。故

$$p_{W,V}(w,v)=\mu_1\mu_2 e^{-\mu_1 wv-\mu_2 v}1_{w>0,v>0}$$

进而，

$$p_W(w)=\frac{\mu_1\mu_2}{\left(\mu_1 w+\mu_2\right)^2}1_{w>0}$$

因此

$$P\left(X_1<X_2\right)=P(W<1)=\int_0^1\frac{\mu_1\mu_2}{\left(\mu_1 w+\mu_2\right)^2}dw$$

$$=\frac{\mu_1}{\mu_1+\mu_2}$$

(3)

解法 1：

$$\begin{aligned}F_{X_1|X_1<X_2}(t)&=P\left(X_1\le t\middle|X_1<X_2\right)\\&=1-P\left(X_1>t\middle|X_1<X_2\right)\\&=1-\frac{P(t<X_1<X_2)}{P(X_1<X_2)}\\&=1-\frac{\mu_1+\mu_2}{\mu_1}\int_{\max(t,0)}^{+\infty}\int_x^{+\infty}\mu_1 e^{-\mu_1 x}\mu_2 e^{-\mu_2 y}dydx\\&=1-\int_{\max(t,0)}^{+\infty}(\mu_1+\mu_2)e^{-(\mu_1+\mu_2)x}\int_x^{+\infty}\mu_2 e^{-\mu_2(y-x)}dydx\\&=1-e^{-(\mu_1+\mu_2)\max(t,0)}=\begin{cases}1-e^{-(\mu_1+\mu_2)t}, & t\ge 0;\\0, & t<0.\end{cases}\end{aligned}$$

即在已知 $X_1<X_2$ 的条件下，X_1 服从指数分布 $Exp(\mu_1+\mu_2)$，从而

$$E\left(X_1\middle|X_1<X_2\right)=\frac{1}{\mu_1+\mu_2}$$

解法 2：

$$p_{X_1|X_1<X_2}(t)=\frac{P\left(X_1\in dt,X_1<X_2\right)}{P(X_1<X_2)}$$
$$=\frac{\int_t^{+\infty}\mu_1\mu_2e^{-\mu_1t-\mu_2y}dy}{\frac{\mu_1}{\mu_1+\mu_2}}$$
$$=(\mu_1+\mu_2)e^{-(\mu_1+\mu_2)t}$$

所以，

$$E\left(X_1\middle|X_1<X_2\right)=\int_0^{+\infty}tp_{X_1|X_1<X_2}(t)dt$$
$$=\frac{1}{\mu_1+\mu_2}$$

解法 3：

$$E\left(X_1\middle|X_1<X_2\right)=\frac{E\left(X_1 1_{X_1<X_2}\right)}{P(X_1<X_2)}$$
$$=\frac{\int_0^{+\infty}\left(\int_t^{+\infty}t\cdot\mu_1e^{-\mu_1t}\cdot\mu_2e^{-\mu_2y}dy\right)dt}{\frac{\mu_1}{\mu_1+\mu_2}}$$
$$=\frac{1}{\mu_1+\mu_2}$$

(4)

证法 1：

$$P\left(X_1\le t,X_1<X_2\right)=P(X_1<X_2)P\left(X_1\le t\middle|X_1<X_2\right)$$
$$=\frac{\mu_1}{\mu_1+\mu_2}\left(1-e^{-(\mu_1+\mu_2)t}\right)$$
$$=P\left(X_1<X_2\right)P\left(X\le t\right)$$

证法 2：

$$p_{I,X}\left(1,t\right)=p_{I,X_1}\left(1,t\right)$$
$$=P\left(X_1<X_2\middle|X_1=t\right)p_{X_1}\left(t\right)$$
$$=P\left(t<X_2\middle|X_1=t\right)p_{X_1}\left(t\right)$$
$$=P\left(t<X_2\right)p_{X_1}\left(t\right)$$
$$=e^{-\mu_2t}\cdot\mu_1e^{-\mu_1t}=\frac{\mu_1}{\mu_1+\mu_2}\cdot(\mu_1+\mu_2)e^{-(\mu_1+\mu_2)t}$$
$$=P(I=1)p_X(t)$$

A 五(B 四)、(15 分)

$Z\sim Exp(1).$

(1)

$$F_Z(t)=P\left(Z\le t\right)=P\left(-\ln X\le t\right)=P(X\ge e^{-t})=\begin{cases}1-e^{-t}, & t\ge 0;\\ 0, & t<0.\end{cases}$$

故 $Z\sim Exp(1)$

(2)

解法 1：卷积公式

$$\begin{aligned}f_{X+Y}(t)&=\int_{-\infty}^{+\infty}f_X(x)f_Y(t-x)dx\\&=\int_0^1 e^{-(t-x)}1_{t-x>0}dx\\&=1_{t>0}e^{-t}\int_0^{\min(1,t)}e^x dx\\&=1_{t>0}e^{-t}\left(e^{\min(1,t)}-1\right)\\&=\begin{cases}e^{-t}\left(e-1\right), & t>1;\\ 1-e^{-t}, & 0<t<1;\\ 0, & t<0.\end{cases}\end{aligned}$$

解法 2：先求概率分布函数

$$\begin{aligned}F_{X+Y}(t)&=P(X+Y\le t)\\&=\begin{cases}\int_0^1\int_0^{t-x}f_X(x)f_Y(y)dydx, & t\ge 1;\\ \int_0^t\int_0^{t-x}f_X(x)f_Y(y)dydx, & 0\le t<1;\\ 0 & t<0.\end{cases}\\&=\begin{cases}\int_0^1 1-e^{x-t}dx=1-e^{-t}(e-1) & t\ge 1;\\ \int_0^t 1-e^{x-t}dx=t+e^{-t}-1 & 0\le t<1;\\ 0 & t<0.\end{cases}\end{aligned}$$

再求导

得概率密度函数（见左边）。

(3)

$$P\left(Y\le 1\middle|X\le e^{\frac{-(Y-1)^2}{2}}\right)=\frac{P\left(Y\le 1,X\le e^{\frac{-(Y-1)^2}{2}}\right)}{P\left(X\le e^{\frac{-(Y-1)^2}{2}}\right)}$$

$$=\frac{\iint\limits_{y\le 1,x\le e^{\frac{-(y-1)^2}{2}}}1_{0<x<1}\cdot e^{-y}1_{y>0}dxdy}{\iint\limits_{x\le e^{\frac{-(y-1)^2}{2}}}1_{0<x<1}\cdot e^{-y}1_{y>0}dxdy}=\frac{\int_0^1 e^{-y}\left(\int_0^{e^{\frac{-(y-1)^2}{2}}}dx\right)dy}{\int_0^{+\infty}e^{-y}\left(\int_0^{e^{\frac{-(y-1)^2}{2}}}dx\right)dy}$$

$$=\frac{\int_0^1 e^{-y}e^{\frac{-(y-1)^2}{2}}dy}{\int_0^{+\infty}e^{-y}e^{\frac{-(y-1)^2}{2}}dy}=\frac{e^{-\frac{1}{2}}\sqrt{2\pi}\int_0^1\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-y^2}{2}}dy}{e^{-\frac{1}{2}}\sqrt{2\pi}\int_0^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-y^2}{2}}dy}\int_0^1\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-y^2}{2}}dy$$

$$=\frac{\Phi(1)-\Phi(0)}{1-\Phi(0)}=2\Phi(1)-1.$$

六、(13分)

(1) 由

$$EX=\int_1^{+\infty}x\cdot\frac{1}{\lambda}e^{-\frac{(x-1)}{\lambda}}dx$$
$$=1+\lambda$$

得

$$\lambda=EX-1$$

用样本均值$\overline{X}$**代换**上式中的总体均值EX，得到λ的矩估计量：

$$\hat{\lambda}_M=\overline{X}-1$$

由

$$E\hat{\lambda}_M=E\left(\overline{X}-1\right)$$
$$=EX-1$$
$$=\lambda,\qquad \forall\lambda>0$$

知$\hat{\lambda}_M=\overline{X}-1$是$\lambda$的无偏估计。

(2) 由

$$Var(X)=\lambda^2$$

知

$$E(S^2)=Var(X)=\lambda^2$$

由中心极限定理，当 n 充分大时，$\overline{X}$ 近似服从如下正态分布

$$\overline{X}\sim N\left(\lambda+1,\frac{\lambda^2}{n}\right)$$

七、(12分)

(1) 由 $\sqrt{\frac{9}{S^2}}\left(\overline{X}-\mu\right)\sim t(8)$，$P\left(\sqrt{\frac{9}{S^2}}\left(\overline{X}-\mu\right)\le t_{0.95}(8)\right)=0.95$，得 μ 的95%置信度的置信下界为

$$\mu = \bar{x}-t_{0.95}(8)\sqrt{\frac{s^2}{9}}=7.68-t_{0.95}(8)\times\sqrt{\frac{0.64}{9}}=7.68-\frac{0.8}{3}\times1.860=7.184$$

(2) 因

$$P_{\mu\ge8}\left(\sqrt{\frac{9}{S^2}}\left(\overline{X}-8\right)\le t_{0.05}(8)\right)\le P_{\mu\ge8}\left(\sqrt{\frac{9}{S^2}}\left(\overline{X}-\mu\right)\le t_{0.05}(8)\right)=0.05$$

故拒绝域为 $\sqrt{\frac{9}{S^2}}\left(\overline{X}-8\right)\le t_{0.05}(8)=-t_{0.95}(8)=-1.860$。代入样本值

$$\sqrt{\frac{9}{0.64}}(7.68-8)=-0.32\times\frac{3}{0.8}=-1.2>-1.860$$

这表明样本尚未落入拒绝域，故不能拒绝原假设 $\mu\ge8$。

清华大学本科生考试试题专用纸

考试课程：概率论与数理统计　考试时间：2011年1月4日

A

姓名____________ 学号 200__________ 班级________

一、填空题（20分，每空2分，将计算结果直接写在横线上）

1. 设事件 A,B 满足 $P(B)=0.4$，$P(\bar{A}|B)=0.8$，$P(\bar{A}|\bar{B})=0.3$，则 $P(A)=$________，$P(B|A)=$________。

2. 设 (X,Y) 的联合概率密度函数为 $f(x,y)=Ae^{-x},(x>0,0<y<2)$，则常数 $A=$________，$P(X<Y)=$__________。

3. 设 $X \sim N(1,4)$，$P(X<a)=\Phi(1)$。则 $a=$________。

4. 设一批零件次品率为 0.01，若用泊松分布近似，100 个零件中最多只有一个次品的概率约为_________。

5. 设 $X_1,\ldots,X_{100}$ 是来自总体 $N(\mu,4)$ 的简单随机样本。对以下原假设和备择假设 $H_0:\mu=0;\quad H_1:\mu>0$，若取拒绝域为 $\{(x_1,\ldots,x_{100}):\bar{x}>0.4\}$，则此检验犯第一类错误的概率为_________，当 $\mu=1$ 时此检验犯第二类错误的概率为___________。（用标准正态分布函数 $\Phi(\cdot)$ 表示）

6. 设总体密度为 $f(x)=\begin{cases} e^{-(x-\theta)}, & x\ge\theta \\ 0, & x<\theta \end{cases}$，其中 $\theta\in(-\infty,+\infty)$ 为未知参数，$X_1,\ldots,X_5$ 为来自该总体简单随机样本。如果选取 $(\min\limits_{1\le i\le5}X_i-1,\quad \min\limits_{1\le i\le5}X_i)$ 为 θ 的置信区间，则它的置信水平为_________。

7. 设随机变量 T 服从自由度为 1 的 $t-$分布，则 $P(T\le1)=$_____________。

二、（14分） 设随机向量 (X,Y) 服从如下形式的离散分布

$X \backslash Y$	-1	0	1
-1	$1/6$	$1/9$	$1/18$
1	a	b	c

(1) 问 a,b,c 取哪些值可使 X,Y 独立？

(2) 判断是否存在 a,b,c 的值使得 X,Y 不相关而且不独立，并说明理由。

三、(18分) 设$X_1,\dots,X_n$独立同分布，该分布的概率密度函数为$f(x)=\frac{1}{2}e^{-|x|}$，$-\infty<x<+\infty$，

(1) 求$Y=\max\{X_1,2\}$的概率分布函数；

(2) 求$\mathrm{E}(S^2)$，这里$S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2$，$\bar{X}=\frac{X_1+\cdots+X_n}{n}$；

(3) 设$n=200$，求概率$P\left(-0.1<\bar{X}<0.1\right)$的近似值。(可用标准正态分布函数$\Phi(x)$表示)。

四、(18分) 袋中装有b个黑球、r个红球和w个白球。以**有放回**的方式每次从袋中取出一个球，直至取到白球时停止。记Y是试验停止时取球的总次数，X为试验停止时取出黑球的累计次数。求

(1) Y的概率分布列，以及数学期望$\mathrm{E}(Y)$；

(2) 条件数学期望$\mathrm{E}\left(X|Y=n\right)$；

(3) 数学期望$\mathrm{E}\left(X\right)$的值。

五、(15分) 设X,Y独立，都服从参数为1的指数分布。记$U=X+Y$，$V=\frac{X}{X+Y}$。

(1) 求(U,V)的联合密度函数；

(2) 问U,V是否独立？给出解释；

(3) 求X和U的相关系数。

六、(15分) 设$X_1,\dots,X_n$是来自总体$X\sim U[0,\theta]$的简单随机样本，其中$\theta>0$是未知参数。

(1) 求θ的矩估计量$\hat{\theta}_{矩}$和最大似然估计量$\hat{\theta}_{MLE}$；

(2) 判断$\hat{\theta}_{矩}$和$\hat{\theta}_{MLE}$是否为θ的无偏估计，并说明理由；

(3) 判断$\hat{\theta}_{矩}$和$\hat{\theta}_{MLE}$是否为θ的相合估计，并说明理由。