

## 概率论与数理统计第四次习题课题目

**题1** 随机变量 $Z$ 服从区间 $[0, 2\pi]$ 上的均匀分布。求 $X = \sin Z, Y = \cos Z$ 的相关系数 $\text{Corr}(X, Y)$ ，并判断 $X$ 与 $Y$ 的独立性。

**题2** 设 $(X_1, X_2, \dots, X_r)$ 服从多项分布 $M(n, p_1, p_2, \dots, p_r)$  ( $p_i > 0, i = 1, \dots, r$ 且 $p_1 + \dots + p_r = 1$ )。求 $X_i$ 与 $X_j$ 的相关系数,  $i, j = 1, \dots, r$ 。

**题3** 设 $(X, \Lambda)$ 的概率分布为： $\Lambda$ 的边缘分布密度为 $\frac{1}{\lambda^2} e^{-\beta/\lambda}$ ,  $\lambda > 0$ , 其中 $\beta$ 为正常数；给定 $\Lambda = \lambda$ 时,  $X$ 服从期望为 $\frac{1}{\lambda}$ 的指数分布。求 $EX$ 。

**题4** 设 $(X, Y)$ 服从二维正态分布 $N(0, 0, 1, 1, \rho)$ 。求 $\max(X, Y)$ 的数学期望和方差。

**题5** 设一对夫妻购买了一项生命年金，支付方式为：当夫妻两人中有一人去世时开始支付，而当另一人也去世时停止支付。记年金开始支付时间为 $X$ ，停止支付时间为 $Y$ 。设这对夫妻在购买年金后的存活年限相互独立，都服从指数分布 $\text{Exp}(\lambda)$ 。

1. 求 $X$ 对 $Y$ 的线性回归（即用 $X$ 的一次函数对 $Y$ 作最小二乘最佳逼近）；
2. 求 $Y$ 对 $X$ 的线性回归；
3. 求 $X$ 的函数对 $Y$ 作最小二乘最佳逼近。

**题6** 一个家族第 $n$ 代男性子孙有 $X_n$ 个人,  $X_0 = 1$ 。假设这个家族中每个男性成员的儿子个数是独立同分布的随机变量, 求  $\lim_{n \rightarrow +\infty} P(X_n = 0)$ 。

**题7** 将编号为 1 至  $n$  的  $n$  个球随机投入编号为 1 至  $n$  的  $n$  个盒子中, 并限制每一个盒子中只能放入一个球, 设球与盒子的号码一致的个数为  $S_n$ , 求证:

$$\frac{S_n - ES_n}{n} \xrightarrow{P} 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

**题8** 一报贩发现每个路过他的报摊的行人向他买报的概率为  $\frac{1}{3}$ 。求在他出售了 100 份报纸时的过路人的数目在 280 人到 320 人之间的概率。（用两种不同的估计方法, 并比较它们的优劣）