概率论与数理统计第三次习题课题目

题1 设随机变量X与Y独立，均服从参数为1的指数分布，求$U = X + Y$，$V = \frac{X}{X+Y}$的联合概率密度函数，并判断独立性。一般地，考虑X, Y为独立Gamma分布（参数分别是(α, λ)和(β, λ)）随机变量的情形。

题2 设随机变量X, Y的联合概率密度函数为

$$f_{X,Y}(x, y) = \frac{1 + xy(x^2 - y^2)}{4}, \qquad |x| \leq 1, |y| \leq 1.$$

求$X + Y$的概率分布函数F_{X+Y}。

题3 设X, Y有联合概率密度函数$f(x, y) = cxy$（$0 \leq x \leq y \leq 2$）。

1. 计算常数c的值；
2. 分别求出X, Y的边缘概率密度函数；
3. 判断X, Y是否独立；
4. 对$0 < y < 2$，求在已知$Y = y$的条件下，X的条件概率密度函数，以及条件数学期望$E(X|Y = y)$；
5. 求$EX, EY, \mathrm{Var}(X), \mathrm{Cov}(X, Y), \mathrm{Corr}(X, Y)$。

题4 设随机变量X与Y有联合概率密度函数$f(x, y) = (1 + xy)/4$（$|x| < 1, |y| < 1$）。

1. 分别求X, Y的边缘概率密度函数；
2. 判断X, Y是否独立；
3. 求X^2, Y^2的联合概率密度函数；
4. 判断X^2, Y^2是否独立；

题5 袋中装有n个黑球和m个白球，每次从袋中取出一个球，不放回，再取，直到取得白球时停止。记X表示取出的黑球的总数。求X的数学期望。（习题2.4.10是放回的情形）

题6 袋中有r种颜色的球，第i种颜色的球有N_i个，$N = N_1 + \cdots + N_r$。现从中一次随机取出n个，记X_i为取出的第i种颜色的球的个数。

1. 求$X_1, \ldots, X_r$的联合概率分布列。
2. 设$1 \leq s < r - 1$。求在已知$X_1 = x_1, \ldots, X_s = x_s$（其中$0 \leq x_i \leq N_i$，$x_1 + \cdots + x_s \leq n$）的条件下，$X_{s+1}, \ldots, X_r$的条件概率分布列。

题7 （Borel悖论）设X, Y服从平面区域

$$D = \{(x, y) : 0 \le y \le 1, 0 \le x + y \le 1\}$$

上的均匀分布。

1. 求条件数学期望$E(Y|X = 0)$的值。
2. 设$U = X/Y$。求条件数学期望$E(Y|U = 0)$的值。

题8 设$X, Y \overset{i.i.d}{\sim} \mathrm{Exp}(\lambda)$。求

$$Z = \begin{cases} 3X + 1, & \text{若} X \ge Y \\ 6Y, & \text{若} X < Y \end{cases}.$$

的数学期望。（这是教材习题3.5.12。）