概率论与数理统计第一次习题课题目

题1 从一批产品中任取n件，以事件A_i表示“第i件取得正品”，用它们表示下列事件：

1. 没有一件是次品(全是正品)
2. 至少有一件是次品
3. 仅仅只有一件是次品
4. 至少有两件不是次品

题2 设有来自2个地区各b_1+g_1名和b_2+g_2名考生的报名表，其中女生的报名表分别为g_1份和g_2份，随机地取一个地区的报名表，从中先后抽取两份,求：

1. 先抽到的一份是女生表的概率。
2. 已知后抽到的一份是男生表，求先抽到的一份是女生表的概率
3. 假设不先确定一个地区，而是从所有报名表中随机抽取两份。如果已知后抽到的一份是一个男生的报名表，那么问先抽到的一份是同地区一个女生的报名表的可能性有多大？

题3 口袋中有a个黑球和b个白球，每次从口袋中随机地摸出一球，并换成一个黑球，

1. 问第k次摸球时，摸到黑球的概率是多少？
2. 以下给出第1问的一种解答方法，请同学们判断这种方法对不对：
   用“末步分析法”（即用此前过程的最后一步的不同结果作划分，使用全概率公式）
   $$P(A_k)=P(A_{k-1})P(A_k|A_{k-1})+P(\overline{A_{k-1}})P(A_k|\overline{A_{k-1}})$$
   如果第$k-1$次取得黑球，那么第k次取球前袋中的情况与第$k-1$次取球前袋中情况完全相同，于是
   $$P(A_k|A_{k-1})=P(A_{k-1});$$
   如果第$k-1$次取得白球，那么新换入的那个黑球导致第k次取到黑球的机会比上一次取得黑球的机会增加了$1/(a+b)$，于是
   $$P(A_k|\overline{A_{k-1}})=P(A_{k-1})+\frac{1}{a+b}.$$
   因此
   $$P(A_k)=P(A_{k-1})^2+P(\overline{A_{k-1}})\left(P(A_{k-1})+\frac{1}{a+b}\right).$$
   然后再此基础上用数学归纳法得到最终结论。

题4 口袋中有N个球，分别标有号码$1,2,\dots,N$，现从中任取m个$(m<N)$，记最小值为X，最大值为Y。

1. 取球不返回时，写出X、Y的分布列。
2. 取球返回时，写出X、Y的分布列。

题5 抽查一个家庭，考察两个事件. A: 至多有一个女孩; B: 男女都有. 针对下面两类家庭, 讨论事件是否独立:

1. 3 个孩子之家;
2. 4 个孩子之家.

3. 如果是 n 个孩子呢？
4. 当 $n \neq 3$ 时，事件 A, B 相互促进还是相互抑制？利用其相关系数进行说明。

题6 从装有m个白球、n个黑球的袋中不放回地取球，直到摸出白球时停止，记X为取出的黑球的个数，求X的分布。

题7 独立重复抛硬币，$A =$“抛一次得正面”，$p = P(A)$，记X为最早得到累计2个正面时抛硬币的次数，Y为最早得到连续2个正面时抛硬币的次数。求X, Y各自的概率分布。

题8 （补充作业题）著名数学家Von Neumann说，即使用一枚不均匀的硬币也可以得到公平的机会。他的做法是：把这枚硬币掷两次，如果两次掷得的结果相同（都是正面或者都是反面），那么就接着再掷两次，直到出现两次结果不同，如果出现的是“正反”，我们定义这种情况为“正”，如果出现的是“反正”，我们定义这种情况是“反”。

1. 证明P(抛硬币在有限次结束) $= 1$；
2. 证明P(最终为“正”面) $= P$(最终为“反”面) $= 0.5$。