第九周作业

1. 设随机变量 X_i（$i=1,\cdots,n$）独立同分布（这样的序列称为来自同一分布的样本），其公共期望为 μ，公共方差为 σ^2，$\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$ 称为样本均值.

   （1） 证明：$\mathrm{Cov}(X_i-\overline{X},\overline{X})=0$.

   （2） $X_i-\overline{X}$ 与 $\overline{X}$ 是否一定独立？尝试给出理由.

2. 下列叙述是否等价？请说明理由.

   (1) $\mathrm{Cov}(X,Y)=0$；

   (2) X 与 Y 不相关；

   (3) $E(XY)=E(X)E(Y)$；

   (4) $Var(X+Y)=Var(X)+Var(Y)$

3. 应用中常常基于随机变量 X 的观察值对随机变量 Y 的值进行预测，假设仅仅知道 X 和 Y 的期望分别为 μ_1 和 μ_2，方差分别为 σ_1^2 和 σ_2^2，相关系数为 ρ.

   （1） 在均方误差意义下求 Y 的最优线性预测，即选择系数 a,b 使得 $E[(Y-(aX+b))^2]$（均方误差）达到极小值.

   （2） 给出这个最优线性预测对应的均方误差，并指出其值何时接近 0.

   （3） 验证：若 X,Y 服从 $N(\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho)$，则 Y 的最优线性预测就是 $E(Y\mid X)$.

4. 某保险公司向 10000 个投保人提供内容相同的汽车保险，假定这 10000 个投保人在一年内由于发生交通事故而造成的损失是独立同分布的，且一辆车在一年内发生事故的概率为 0.001，事故损失为 1000 元.

   （1） 如果忽略运营成本，保险公司每份保险卖 2 元合理吗？

   （2） 保险公司至少有 20%的毛利润（毛利润=保费-保险赔付-运营成本（忽

略））的概率多大？

（3） 以 95%的概率可以保证保险公司至少还有多少毛利润？

5. 假设一个物理量的真值为m，多次对其测量，每次测量产生一个随机误差，合理的假设是，在选择适当的单位下，随机误差服从-1和1之间均匀分布.

（1） 求n次测量的算术平均值与真值的差的绝对值低于微小正数δ的概率，并利用中心极限定理给出$n=25$，$\delta=0.2$情形的概率近似值；

（2） 要使得算术平均值与真值的差的绝对值低于微小正数δ的概率超过α（“显著水平”），应该进行多少次测量？给出$\delta=0.2$，$\alpha=0.95$情形的测量数.

（3） 利用切比雪夫不等式求解（2），并比较两种方法得出的结果.

6. 陈希孺书第三章习题 20.

20．解第二章 27 题，用如下的方法：找 b，使 $X+bY$ 和 $X-bY$ 的相关系数为 0. 这比用第二章的方法简单得多.