第九周作业

1. N 个人把他们的帽子放在一个房间，充分混合后随机取一顶帽子，求选中自己帽子的人数的期望值.
2. 判断下列结论对错并说明理由，这里假设所涉及的期望和方差皆存在.

   （1） $E(XY)=E(X)E(Y)+E[(X-E(X))(Y-E(Y))]$.

   （2） 对任何常数 c 有 $E((X-c)^2)\ge Var(X)$，等号当且仅当 $c=E(X)$ 时成立.

   （3） 若 X 和 Y 独立，则 $Var(XY)=Var(X)Var(Y)$.

   （4） X 的中位数若存在则一定等于 $E(X)$.
3. 一个矿工在井下迷了路，迷路的地方有三个门，假设从第一个门出来，经过 2 小时可达安全之处；若从第二个门出来，经过 3 小时后会回到原地；若从第三个门出来，经过 1 小时后会回到原地. 假定该人选择门是随机的，能够走到安全之处的平均用时是多少？
4. 设随机变量 X_i（$i=1,\cdots,n$）独立同分布（这样的序列称为来自同一分布的样本），其公共期望为 μ，公共方差为 σ^2，$\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$ 称为样本均值，$S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$ 称为样本方差. 求 $\mathrm{Var}(\overline{X})$ 和 $E(S^2)$.
5. 假设点 (X,Y) 服从单位圆上半部分上的均匀分布. 若观测到 X，那么 Y 在均方误差意义下的最优预测值是什么？反过来呢？
6. 证明：若 $E[(Y-X)^2]=0$，则 $P(Y=X)=1$.
7. 陈希孺书第三章习题 1, 4, 5, 11, 19.

1. 计算对数正态分布的均值和方差(对数正态分布见第二章习题 19).

4. 一人有 N 把钥匙，每次开门时，他随机地拿出一把(只有一把钥匙能打开这道门)，直到门打开为止. 以 X 记到此时为止用的钥匙数(包括最后拿对的那一把). 按以下两种情况分别计算 $E(X)$：(a)试过不行的不再放回去. (b)试过不行的仍放回去.

5. 某县有 N 农户，其年收入分别为 $a_1,\cdots,a_N$. 为估计平均收入 $a=(a_1+\cdots+a_N)/N$，随机不放回地抽出 n 农户($1\leqslant n\leqslant N$)，以 $X_1,\cdots,X_n$ 记所抽出的 n 农户的年收入，而以 $X=(X_1+\cdots+X_n)/n$ 去估计 a. 计算 $E(\bar{X})$ 和 $\mathrm{Var}(\bar{X})$.

11. 设 X,Y 独立，都服从标准正态分布，而 $Z=(aX^2+bY^2)/(X^2+Y^2)$，其中 a,b 为常数. 计算 $E(Z)$ 和 $\mathrm{Var}(Z)$.

19. 设 X 有概率密度函数 $f(x)$. 令 $h(a)=E|X-a|$. 证明：当 a 等于 X 的中位数 m 时，$h(a)$ 达到最小(这是中位数一个重要性质).