第七周作业

1. 假设 X 和 Y 的联分布的概率合密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{e^{-x/y}e^{-y}}{y} & x>0,y>0\\ 0 & 其他\end{cases},$$

求 $P(X>1|Y=y)$.

2. 甲乙两人约定在某个地点见面，如果每个人到达的时间是独立的，且在下午 1 点至 2 点之间均匀分布，求先到的人需要等待 10 分钟以上的概率.

3. 考虑 n 个随机变量 X_i（$i=1,\cdots,n$）.

（1） 证明：如果对于任意区间 I_i，事件 $A_i=\{X_i\in I_i\}$（$i=1,\cdots,n$）满足 $P(A_1A_2\cdots A_n)=P(A_1)P(A_2)\cdots P(A_n)$，则对于任意区间 I_i，事件 $A_i=\{X_i\in I_i\}$（$i=1,\cdots,n$）独立.

（2） 比较（1）的结论与 n 个事件独立的概念，试简单说明区别以及理由.

4. 设 (X_1,X_2) 服从二维正态分布 $N(\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho)$，证明：$Y=X_1+X_2$ 服从正态分布 $N(\mu_1+\mu_2,\sigma_1^2+\sigma_2^2+2\rho\sigma_1\sigma_2)$.

5. （自由度为 n 的卡方分布）证明：若 n 个随机变量 X_i（$i=1,\cdots,n$）相互独立，且都服从标准正态分布，则 $Y=X_1^2+\cdots+X_n^2$ 服从自由度为 n 的卡方分布 χ_n^2，即 Y 的概率密度函数为

$$k_n(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\Gamma\left(\dfrac{n}{2}\right)2^{n/2}}e^{-x/2}x^{(n-2)/2} & x>0\\ 0 & x\le 0\end{cases},$$

这里 $\Gamma(x)=\int_0^{\infty}e^{-t}t^{x-1}\,dt$ 为 Gamma 函数.

6. 陈希孺书第二章习题 13，17，22.

13. 设 $X_1,\cdots,X_r$ 独立同分布，其公共分布为几何分布(1.12). 用归纳法证明：$X_1+\cdots+X_r$ 服从负二项分布(1.11). 又：对这个结果作一直观上的解释，因而得出一简单证法.

17. 设 X, Y 独立，各有概率密度函数 $f(x)$ 和 $g(y)$，且 X 只取大于 0 的值. 用以下两种方法计算 $Z=XY$ 的概率密度，并证明结果一致：

(a) 利用变换 $Z=XY, W=X$.

(b) 把 XY 表为 Y/X^{-1}. 先算出 X^{-1} 的密度，再用商的密度公式(4.29).

22. 设 $X_1,\cdots,X_n$ 独立同分布，X_1 有分布函数 $F(x)$ 和密度函数 $f(x)$. 记

$$Y=\max(X_1,\cdots,X_n), Z=\min(X_1,\cdots,X_n)$$

证明：Y, Z 分别有概率密度函数 $nF^{n-1}(x)f(x)$ 和 $n[1-F(x)]^{n-1}\cdot f(x)$.

7. 了解统计上的三大分布：卡方分布，t 和 F 分布（参阅陈希孺书或维基百科）.