

第六周作业

1. 令随机变量 X 服从 $[0, 1]$ 上的均匀分布.

(1) 求 $Y = \frac{1}{X}$ 的分布.

(2) 利用 X 构造一个随机变量使其服从参数为 $\lambda > 0$ 的指数分布.

2. 袋中有 3 个红球, 4 个白球, 5 个黑球.

(1) 每次随机取出一个球记录颜色然后放回, 那么 6 次取球出现红球 2 次, 白球 3 次, 黑球 1 次的概率是多少?

(2) 随机从中一次性取出 3 个球, 令 X, Y 分别表示取出的红球数和白球数, 请给出随机向量 (X, Y) 的分布列 (或分布表).

(3) 求 $P(X = 1)$.

3. 设随机变量 X, Y 的联合分布函数为 $F(x, y)$, 证明:

$$P(a < X \leq b, c < Y \leq d) = F(b, d) - F(a, d) - F(b, c) + F(a, c).$$

4. 随机从以原点为圆心的单位圆内取一点, 假设该点在圆内服从均匀分布, 令 (X, Y) 表示该点的坐标.

(1) 求 (X, Y) 的概率密度函数;

(2) 计算 X 和 Y 的边缘分布的概率密度函数;

(3) 记该点与圆心的距离为 R , 求 $P(R \leq r)$, 这里 $0 < r < 1$ 为常数;

(4) 计算期望 $E(R)$.

5. 陈希孺书第二章习题 19, 28 ((b) 中证明不用做), 30.

19. 设 Y 为只取正值的随机变量, 且 $\log Y$ 服从正态分布 $N(a, \sigma^2)$. 求 Y 的密度函数 (Y 的分布称为对数正态分布).

28. 设 (X, Y) 有密度函数

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{c}{1 + x^2 + y^2}, & \text{当 } x^2 + y^2 \leq 1 \\ 0, & \text{当 } x^2 + y^2 > 1 \end{cases}$$

(a) 求出常数 c . (b) 算出 X, Y 的边缘分布密度, 并证明 X, Y 不独立.

30. 设 X, Y 独立, 都服从标准正态分布 $N(0, 1)$, 以 $f(x, y)$ 记 (X, Y) 的联合密度函数. 证明: 函数

$$g(x, y) = \begin{cases} f(x, y) + xy/100, & \text{当 } x^2 + y^2 \leq 1 \\ f(x, y), & \text{当 } x^2 + y^2 > 1 \end{cases}$$

是二维概率密度函数. 若随机向量 (U, V) 有密度函数 $g(x, y)$, 证明: U, V 都服从标准正态分布 $N(0, 1)$, 但 (U, V) 不服从二维正态分布:

本例说明: 由各分量为正态推不出联合分布为正态.