第四周作业

1. 某学生参加限时为 1 小时的测验，其在 x（$0 \le x \le 1$）小时内完成的概率是 $0.5x$，已知他在 45 分钟后仍在答题，问他最后用光 1 小时的概率是多少？

2. 掷 2 颗均匀的骰子，并记录点数之和 X.

（1）若掷一次并观察到点数之和为奇数，求 $P(X=7)$.

（2）若反复掷直到 $X=7$ 出现，求该事件发生的概率. 与直觉是否相符？

（3）若反复掷，求 $X=7$ 先于 $X=8$ 出现的概率.

3. 假设袋中有 a 个黑球，b 个白球. 每次取出一个球，取到白球则停止，记 X 为此时已取出黑球的个数，求 $P(X=k)$（$k=1,2,\cdots$）.

4. 已知 $F(x)=P(X\le x)$ 是随机变量 X 的分布函数.

（1）证明：$\lim\limits_{x\to-\infty} F(x)=0$，$\lim\limits_{x\to\infty} F(x)=1$.

（2）求 $P(a\le X\le b)$.

5. 给出 5 个不同的随机变量的例子，并指明随机变量的类型和相关的样本空间.

6. 已知 X 为离散型随机变量，证明：$\mathrm{Var}(X)=E(X^2)-E^2(X)$；你中学学到的方差是否与课上的定义相一致？请简要说明理由.

7. 陈希孺书第二章习题第 4，5 题.

4. 甲、乙二人赌博. 每局甲胜的概率为 p，乙胜的概率为 $q=1-p$. 约定：赌到有人胜满 a 局为止，到这时即算他获胜. (a) 求甲胜的概率. (b) 若 $p=1/2$，用(a)的结果以及用直接推理，证明甲胜的概率为 1/2.

5. 以 $b(k;n,p)$ 记二项分布概率 $\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$. 证明：(a)若 $p\leqslant 1/(n+1)$，则当 k 增加时 $b(k;n,p)$ 非增. (b)若 $p\geqslant 1-1/(n+1)$，则当 k 增加时 $b(k;n,p)$ 非降. (c) 若 $1/(n+1)<p<1-1/(n+1)$，则当 k 增加时，$b(k;n,p)$ 先增后降. 求使 $b(k;n,p)$ 达到最大的 k.