第五次作业

1. 令 X 为连续型随机变量，其密度函数为 $f(x)$，假设 $g(x)$ 为严格单调可微函数，求 $g(X)$ 的密度函数.

2. 令随机变量 X 服从 $[0,1]$ 上的均匀分布.

   (1) 求 $Y=\dfrac{1}{X}$ 的分布.

   （2）利用 X 构造一个随机变量使其服从参数为 $\lambda>0$ 的指数分布.

3. 袋中有 3 个红球，4 个白球，5 个黑球.

   （1） 每次随机取出一个球记录颜色然后放回，那么 6 次取球出现红球 2 次，白球 3 次，黑球 1 次的概率是多少？

   （2） 随机从中一次性取出 3 个球，令 X,Y 分别表示取出的红球数和白球数，请给出随机向量 (X,Y) 的分布列（或分布表）.

   （3） 求 $P(X=1)$.

4. 设随机变量 X,Y 的联合分布函数为 $F(x,y)$，证明：

$$P(a<X\le b,c<Y\le d)=F(b,d)-F(a,d)-F(b,c)+F(a,c).$$

5. 随机从以原点为圆心的单位圆内取一点，假设该点在圆内服从均匀分布，令 (X,Y) 表示该点的坐标.

   （1） 求 (X,Y) 的概率密度函数；

   （2） 计算 X 和 Y 的边际分布的概率密度函数；

   （3） 记该点与圆心的距离为 R，求 $P(R\le r)$，这里 $0<r<1$ 为常数；

   （4） 计算期望 $E(R)$.

6. 完成课上二元正态分布的边际密度的计算.

7. 陈希孺书第二章习题 19,28（（b）中的证明部分不用做）,30.

19. 设 Y 为只取正值的随机变量，且 $\log Y$ 服从正态分布 $N(a, \sigma^2)$. 求 Y 的密度函数（Y 的分布称为对数正态分布）.

28. 设(X, Y)有密度函数

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{c}{1 + x^2 + y^2}, & \text{当 } x^2 + y^2 \leqslant 1 \\ 0, & \text{当 } x^2 + y^2 > 1 \end{cases}$$

(a) 求出常数 c. (b)算出 X, Y 的边缘分布密度，并证明 X, Y 不独立.

30. 设 X, Y 独立，都服从标准正态分布 $N(0,1)$，以 $f(x, y)$记(X, Y)的联合密度函数. 证明：函数

$$g(x, y) = \begin{cases} f(x, y) + xy/100, & \text{当 } x^2 + y^2 \leqslant 1 \\ f(x, y), & \text{当 } x^2 + y^2 > 1 \end{cases}$$

是二维概率密度函数. 若随机向量(U, V)有密度函数 $g(x, y)$，证明：U, V 都服从标准正态分布 $N(0,1)$，但(U, V)不服从二维正态分布：

本例说明：由各分量为正态推不出联合分布为正态.