清华大学本科生考试试题专用纸

考试课程：**概率论与数理统计**　考试时间：2010 年 1 月 18 日

A

姓名______________学号 200____________班级_________.

一、选择题（10 分，每空 2 分，将选项对应的大写英文字母直接写在横线上）

1. 若事件 A,B 独立，$P(A)>0,P(B)>0$，则 $A,B,A\cup B$ 相互独立的充要条件是__________。

   (A) $P(A\cup B)=1$　(B) $A\cup B=\Omega$　(C) 以上选项都不对.

2. 对正态总体的均值进行假设检验，如果在显著性水平 $\alpha=0.05$ 下，接受原假设 $H_0:\mu=\mu_0$，则在显著性水平 $\alpha=0.01$ 下，下列结论中正确的是________。

   (A) 必接受 H_0　(B) 必拒绝 H_0　(C) 可能接受，也可能拒绝 H_0.

3. 如果随机变量 X,Y 具有相同的概率分布，则下列结论中必然正确的是________。

   (A) $P(X=Y)=1$　(B) X,Y 具有相同的中位数　(C) X,Y 具有相同的数学期望.

4. 设 A,B,C 都是正概率事件，A,B 互不相容，则以下两个等式中_______总成立。

   (A) $P(C\mid A\cup B)=P(C\mid A)+P(C\mid B)$　(B) $P(A\cup B\mid C)=P(A\mid C)+P(B\mid C)$.

5. 设 X_i 服从 $B(1,p_i)$，$0<p_i<1,(i=1,2)$。则"X_1,X_2 独立"是"X_1,X_2 不相关"的__________条件。

   (A) 充分但不必要　(B) 必要但不充分　(C) 充分而且必要.

二、填空题（15 分，每空 3 分，将计算结果直接写在横线上）

6. 设随机变量 X,Y 均服从正态分布 $N(0,\sigma^2)$，且 $P(X\le 0,Y>0)=0.3$，则 $P(X>0,Y<0)$=______。

7. 设随机变量 X 与 Y 相互独立，均服从 $[0,1]$ 上的均匀分布，则 $P(|X-Y|>0.5)=$________。

8. 随机变量 X 服从几何分布 $Ge(p)$，则 $P(X=4|X>3)=$_______________。

9. 设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自参数为 2 的 Poisson 总体的简单随机样本，令 $B_n^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2$，则 $EB_n^2=$___________。

10. 设 X 的概率密度函数为 $f_X(x)=\lambda e^{-a\lambda|x|},\quad -\infty<x<\infty,\lambda>0$，则正常数 $a=$_______。

三、(15 分) 连续做某项试验，每次试验只有成功和失败两种结果，而且第 $k+1$ 次试验的结果只与第 k 次试验结果有关：当第 k 次试验成功时，第 $k+1$ 次试验成功的概率为 2/3 ；当第 k 次试验失败时，第 $k+1$ 次试验成功的概率为 1/6 。已知第 1 次试验成功的概率为 1/3 。

(1) 求第 2 次试验成功的概率，第 k 次试验成功的概率；

(2) 在已知第 3 次试验成功的条件下，求第 2 次试验成功的概率；

(3) 用 X 表示首次获得成功时的试验次数，求 X 的概率分布。

四、(20 分) 设相互独立的随机变量 X_i 分别服从参数为 $\mu_i > 0\ (i=1,2)$ 的指数分布，记

$$X = \min(X_1, X_2),\quad I = \begin{cases} 1, & X_1 < X_2, \\ 0, & X_1 \ge X_2. \end{cases}$$

(1) 求 X 的概率分布函数；

(2) 求 $P(X_1 < X_2)$；

(3) 求 $E(X_1 \mid X_1 < X_2)$；

(4) 试证明 I 与 X 相互独立。

五、(15 分) 设 X 服从均匀分布 $U(0,1)$，Y 服从指数分布 $Exp(1)$，而且它们相互独立。

(1) 证明 $Z = -\ln X$ 服从指数分布 $Exp(1)$。

(2) 求 $X+Y$ 的概率密度函数。

(3) 证明 $P(Y \le 1 \mid X \le e^{\frac{-(Y-1)^2}{2}}) = 2\Phi(1) - 1$，其中 $\Phi(x)$ 是标准正态分布 $N(0,1)$ 的概率分布函数。

六、(13 分) 设总体 X 的概率密度函数为 $f(x) = \frac{1}{\lambda} e^{-\frac{(x-1)}{\lambda}}$，$x \ge 1$，其中 $\lambda (>0)$ 是未知参数。设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 为来自该总体的简单随机样本，$\overline{X}$ 和 S^2 分别是其样本均值和样本方差。

(1) 求 λ 的矩估计 $\hat{\lambda}_M$， 并判断它是否为 λ 的无偏估计，说明道理。

(2) 求 $E(S^2)$ 及 n 足够大时 $\overline{X}$ 的近似分布。

七、(12 分) 对总体 $N(\mu, \sigma^2)$ (参数均未知)的简单随机样本，$n=9$，测得样本均值 $\overline{x} = 7.68$，样本方差 $s^2 = 0.64$。

(1) 试写出 μ 的置信度 95%的置信下限（不需计算）；

(2) 在显著性水平 α = 0.05 下作关于 $H_0: \mu \ge 8$ 的假设检验。

附表 $\Phi(x)$ 是标准正态分布 $N(0,1)$ 的概率分布函数。

$$\Phi(1.282) = 0.9,\quad \Phi(1.440) = 0.925,\quad \Phi(1.645) = 0.95,\quad \Phi(1.960) = 0.975,\quad \Phi(2.326) = 0.99$$

上侧分位数	$\chi^2_{0.975}(n)$	$\chi^2_{0.95}(n)$	$\chi^2_{0.05}(n)$	$\chi^2_{0.025}(n)$	$t_{0.05}(n)$	$t_{0.025}(n)$
$n=8$	2.180	2.733	15.507	17.535	1.860	2.306
$n=9$	2.700	3.325	16.919	19.023	1.833	2.262