概率论与数理统计期中考试试题

考试时间： 2009 年 4 月 18 日 9：50－11：50

姓名________ 学号200 0________ 班级__________

说明：选择题答案写在本页上，其他题目在答题本上解答（写清题号及解题过程）。考试结束时，把试题纸对折后插入答题本内由监考教师统一收回。

一、单项选择题（18 分，每题 2 分），请将正确答案对应的字母填在指定横线处。

1. 任何一个事件和它的对立事件之间_______________。

   (A) 相容　(B) 互不相容　(C) 独立　(D) 不独立。

2. 随机变量 X 的分布律：$P\{X=i\}=2(1-2a)a^i$，$i=0,1,2,\cdots$。则常数 $a=$_______。

   (A) 3　(B) 2　(C) $\frac{1}{2}$　(D) $\frac{1}{3}$

3. 设随机变量 X 服从标准正态分布，则随机变量 $Y=2|X|$ 的概率密度函数是_____。

   (A) $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\ e^{-\frac{y^2}{8}}\ (y>0)$　(B) $\sqrt{\frac{2}{\pi}}\ e^{-\frac{|y|}{4}}\ (y\in R)$

   (C) $\sqrt{\frac{2}{\pi}}\ e^{-\frac{y^2}{8}}\ (y>0)$　(D) $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{|y|}{4}}\ (y>0)$

4. 事件 A,B 相互独立，且 $P(\overline{A}\,\overline{B})=\frac{2}{9}$，$P(\overline{A}B)=P(AB)$，$P(A)\geq P(B)$，则 $P(A)=$__。

   (A) $\frac{1}{2}$　(B) $\frac{2}{5}$　(C) $\frac{4}{9}$　(D) $\frac{2}{3}$

5. 如果 $0<\mathrm{Var}(X)<+\infty$，则 $\mathrm{Var}\left(\frac{X-E(X)}{\mathrm{Var}(X)}\right)=$_______________。

   (A) 1　(B) 0　(C) $\frac{1}{Var(X)}$　(D) $Var(X)$

6. 随机变量 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，则 $E(|X-\mu|)=$_____________。

   (A) 0　(B) $\sigma\sqrt{\frac{2}{\pi}}$　(C) σ　(D) σ^2

7. Laplace 分布的密度函数为 $p(x)=\frac{1}{2}e^{-|x|}$，$x\in R$，其期望等于____________。

   (A) 0　(B) 1　(C) e　(D) 不存在

8. 假设连续型随机变量 X,Y 在 $0<x<1, 0<y<1$ 上 满足 $p_{Y|X}(y|x)=\frac{2y+4x}{1+4x}$，$p_X(x)=\frac{1+4x}{3}$，则 $0<x<1, 0<y<1$ 时，$p_{X|Y}(x|Y=y)$=_______________。

   (A) $\frac{y+2x}{y+1}$　(B) 1　(C) $\frac{y+x}{y+1}$　(D) $\frac{y+4x}{y+2}$

9. 在$[a,b]$区间上取值的随机变量X，其方差最大可以达到________________。

(A) b^2-a^2 (B) $\left(\frac{b-a}{2}\right)^2$ (C) $(b-a)^2$ (D) $\frac{b^2-a^2}{2}$

二、(12 分) 射击室里有 10 支步枪，其中 2 支经过校准，用其射击命中率为 0.8，用其他 8 支射击的命中率为 0.2。

(1) 今从室内任取一步枪对目标射击恰好命中，求使用的枪为已校准的概率；

(2) 任取一支步枪，射击 10 次，命中 5 发的概率是多少？

三、(12 分) (1) 反复掷一颗公正的色子，直到首次连续出现两个 6 点，求投掷次数的期望；

(2) 设甲、乙两人进行一场比赛，投掷色子直至首次相继出现“6 点 6 点”或 “1 点 6 点”停止，如果以“6 点 6 点”结束，则甲胜，以“1 点 6 点”结束为乙胜，请问甲、乙的获胜概率。

四、(12 分) 如果X服从几何分布$Ge(p)$，Y服从指数分布$Exp(\lambda)$，请证明：

(1) 对任意正整数m和n，有$P(X>n+m|x>m)=P(X>n)$；

(2) 对任意$s>0$和$t>0$，有$P(Y>s+t|y>s)=P(Y>t)$。

几何分布与指数分布的上述性质称为**“无记忆性”**，请简单解释无记忆性的直观含义。

五、(10 分) (1) X为一只取正整数值的离散型随机变量，证明$E(X)=\sum_{k=1}^{\infty}P(X\geq k)$；

(2) 利用此公式计算几何分布$Ge(p)$的期望。

六、(12 分) 设随机变量X,Y独立同分布，且X的概率分布为

X	1	2
P	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$

$U=\max\{X,Y\}$，$V=\min\{X,Y\}$。

(1) 求(U,V)的联合概率分布；(2) 求U,V的期望和方差。

七、(18 分) 二元随机变量(X,Y)的联合密度函数$p(x,y)=\begin{cases}1, & |y|<x, 0<x<1\\ 0, & 其他\end{cases}$，求

(1) $p_{Y|X}(y|x)$，$p_{X|Y}(x|y)$； (2) $E(Y|X)$，$E(X|Y)$；

(3) $P\left(|Y|<\frac{1}{3}\middle|X=\frac{1}{2}\right)$，$P\left(X<\frac{1}{3}\middle|Y=-\frac{1}{2}\right)$.

八、(6 分) 冒泡排序法的基本思想是交换所有的相邻逆序，直到没有逆序为止。假设冒泡排序算法的输入是n个不同数的一个随机排序，即等可能地为n个不同数的n！种排列中的任意一个，求冒泡法需要交换逆序的次数的期望值。