

随机数学 B 卷

叶俊 史灵生 2006-6-18

一、(20分) 判断题。需要简略地写出理由

1、 $0 < P(A) < 1, 0 < P(B) < 1, P(A|B) + P(A^c|B^c) = 1$, 那么 A 与 B 互相独立。

2、若 X 服从参数为 2 的指数分布, 则 $Y = 1 - e^{-2X}$ 服从(0,1)上的均匀分布。

3、 $X \sim N(m, s^2)$, $P(|X - \mu| < \sigma)$ 随 σ 的增大而增大。

4、(X,Y)服从二维正态分布, $X \sim N(1, 3^2), Y \sim N(0, 4^2)$, X 和 Y 的相关系数是 $-\frac{1}{2}$,

$Z = \frac{X}{3} + \frac{Y}{2}$, 那么 X 与 Z 互相独立。

二、(15分) X 服从参数为 λ 的指数分布, 分布函数为 F(x), 已知 $F(\frac{1}{3}) = \frac{1}{2}$

1、求 $\min_c E((X - C)^2)$

2、求 $P(X > \sqrt{DX})$

3、 X_1, X_2, \dots, X_n 是独立和 X 同分布的随机变量, 那么 $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i^2)$ 依概率收敛到多少?

三、(15分) 有一种实验, 每次要么成功要么失败。重复这个实验若干次, 如果第 k 次成功, 那么第 k+1 次成功的概率是 $\frac{1}{2}$, 如果第 k 次失败, 那么第 k+1 次成功的概率为 $\frac{3}{4}$ 。

第一次成功的概率为 $\frac{1}{2}$ 。

1、记 p_n 为第 n 次成功的概率, 写出 p_n 的递推式

2、如果首次成功发生在第 X 次, 求 X 的概率分布

3、求 E(X)

4、求 X 的特征函数

四、(15分) 随机变量 X 与 Y 独立同分布, $P(X=1)=p, P(X=0)=1-p$, $Z = \begin{cases} 1, & \text{if } X + Y = 1 \\ 0, & \text{else} \end{cases}$

1、求 Z 的概率分布

2、求(X,Z)的联合分布

3、求 Cov(X,Z)

4、p 为多少时, X 与 Z 互相独立?

五、(20分) 随机向量(X,Y)在 $0 < y < x < 1$ 的三角形内均匀分布

1、求(X,Y)的联合分布

2、求 X 和 Y 的边缘分布

3、求 E(Y|X)

4、求 E(X|X+Y<1)

六、(15分) $\{B_t; t \geq 0\}$ 为标准 Brown 运动

1、求 $E((B_{100} - B_1)(B_{200} - B_2))$

2、 $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n < t_{n+1} = 1$

$$\text{证明 } E\left(\sum_{i=0}^n (c_i (B_{t_{i+1}} - B_{t_i}))^2\right) = \sum_{i=0}^n (c_i^2 (t_{i+1} - t_i))$$

3、求 $B_1 + 2B_2 + 3B_3$ 的分布