# 清 华 大 学 本 科 生 考 试 试 题 专 用 纸

考试课程　　　　　　　　　　　　　　　　　年　　月　　日

卷 **B**《概率论与数理统计考试题》(03.12)　　　　班级_________学号_________姓名__________

记号：~服从；　:= 记为；　*iid* 独立同分布；　*df* 分布函数；　*pdf* 分布密度函数；
$\boldsymbol{rv}$ 随机变量；$\boldsymbol{r\vec{v}}$ 随机向量 **B**(n, *p*)二项分布　**P**(λ) Poisson 分布；**Ge**(*p*) 几何分布；
**Ex**(λ) 指数分布；　**U**(a,b)均匀分布；　N($\mu,\sigma^2$)正态分布。

一(30 分)填空与判断正误（正确时填√，错误时填×；填入的分布必须带参数）

1. 设 P(AB)=0.2，P(A)=0.5, P(B-A)=0.2, 则 P(AUB)=________及 P($\overline{B}$)=________；且事件 A 与 B 独立（　　）

2. 设两个相互独立的事件 A 和 B 都不发生的概率为 1/9，事件 A 发生 B 不发生的概率与事件 A 不发生 B 发生的概率相等，则 P（A）=___________

3. 设$(X_1,X_2)\sim N(0,0,\sigma^2,\sigma^2,0.5)$，令$Y_1=X_1-\frac{1}{2}X_2$，$Y_2=\frac{1}{2}X_1-X_2$，则$Y_1$和$Y_2$都有正态分布且分布参数相同（　　），但不独立（　　）。

4. 设有一个强度为$\lambda$的电话呼叫 Poisson 流，$\eta_3$是其第三个呼叫来的时刻，试利用切贝雪夫不等式求概率 P($|\lambda\eta_3-3|<\lambda$)的下限=_________

5. 设 rv X 和 Y *iid*, ~U[-1,1]，并如下定义 rv Z，求 DZ=________

$$Z=\begin{cases}1 & 若\ X>Y\\ 0 & 若\ X=Y\\ -1 & 若\ X<Y\end{cases}$$

6. 设总体 X 的方差存在，$X_1,X_2,\ldots,X_{n+1}$是其简单样本，令$\mathrm{Y_k}=\frac{1}{\mathrm{k}}\Sigma_{\mathrm{i=1}}^{\mathrm{k}}\mathrm{X_i}$，k=n.,n+1，则用$\mathrm{Y_n}$及$\mathrm{Y_{n+1}}$估计 EX 时，$\mathrm{Y_{n+1}}$比$\mathrm{Y_n}$更有效（　　）

   如果总体$\mathrm{X}\sim\mathrm{N}(0,\sigma^2)$，则$\frac{\mathrm{X_1+X_2}}{|\mathrm{X_1-X_2}|}$的分布为 t(2)。（　　）

二 (**10** 分) 试证指数分布的无记忆性，即如 X~Ex(λ)，则对任意的 s,t>0，有 *P(X>t+s|X>s)=P(X>t)*

**三(10** 分) 经以往检验已确认某公司组装 PC 机的次品率为 0.04，现对该公司所组装的 PC100 台逐个独立的测试。

(1) 试求不少于 4 台次品的概率（只要写出精确计算的表达式）；

(2) 用 Poisson 逼近定理给出此概率的近似值。

**四(10** 分)设二维 $\boldsymbol{r\vec{v}}$**(X,Y)**在矩形$G=\{(x,y)|0\le x\le y\le 1\}$上服从均匀分布，试求边长为 X 和 Y 的矩形面积 S 的 pdf $f(s)$.

**五(10** 分) 设$\boldsymbol{r\vec{v}}$**(X,Y)**的 pdf 为$f(x,y)=\frac{1}{2}[\varphi_1(x,y)+\varphi_2(x,y)]$，其中$\varphi_1(x,y)$和$\varphi_2(x,y)$都是二维正态 pdf，且他们对应的二维 rv 的相关系数分别为 1/3 和−1/3，它们的边缘 pdf 所对应的 rv 的数学期望都是 0，方差都是 1.

(1) 求 X 和 Y 的 pdf $f_1(x)$和$f_2(x)$，及 X 和 Y 的相关系数$\rho$（可以直接利用二维正态密度的性质）

(2) 问 X 和 Y 是否独立？为什么？

**六(10** 分) 3 个袋子各装 r+b 只球，其中红球 r 只。今从第 1 个袋子随机取一球，放入第 2 个袋子，再从第二个袋子再随机取一球，放入第 3 个袋子。令

$$X_k=\begin{cases}1 & （当第k次取出红球）\\ -1 & （反之）\end{cases},k=1,2,3$$

则(1)试求 $\boldsymbol{X_3}$ 的分布； (2) 设 $r=b$，求 $X_1$ 和 $X_2$ 的相关系数 $\rho$ (3)求$\Sigma_{i=1}^{n}=X_i$的精确分布

**七(20** 分) 设某糖厂用自动包装机集箱外运糖果，某日开工后在生产线上抽测 9 箱，得数据 99.3, 98.7, 100.5, 101.2, 98.3, 99.7, 99.5, 102.1, 100.5 （kg）。认为包装的每箱糖重为正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$，参数未知，取 α=0.05。

(1) 试着给出$\mu$的最大似然估计值（可以利用似然估计的已有结论）

(2) 求$\sigma$的置信度为 0.95 的双侧置信区间。

(3) 如果规定包装机每箱糖重量为 100kg，问由抽测数据能否有 95%的把握断言生产线上每箱装糖重量不低于规定重量？

附表 $z_{0.05}$=1.64, $z_{0.025}$=1.96

| $\chi^2_\alpha(n)$ | n=8 | n=9 | $\chi^2_\alpha(n)$ | n=8 | n=9 | $t_\alpha(n)$ | n=8 | n=9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\alpha$=0.95 | 2.733 | 3.325 | $\alpha$=0.05 | 15.507 | 16.919 | $\alpha$=0.05 | 1.8595 | 1.8331 |
| $\alpha$=0.975 | 2.180 | 2.700 | $\alpha$=0.025 | 17.535 | 19.023 | $\alpha$=0.025 | 2.3060 | 2.2622 |

## 参考答案

一．1. $\underline{0.7}$，$\underline{0.6}$，$\underline{\surd}$

2. $\underline{2/3}$

3. $\underline{\surd}$，$\underline{\surd}$

4. $\underline{3/\lambda^2}$

5. $\underline{1}$

6. $\underline{\surd}$，$\underline{\times}$

二．$\dfrac{e^{-\lambda(t+s)}}{e^{-\lambda s}}=e^{-\lambda t}$

三．(1) $1-\sum_{k=0}^{3}C_n^k p^k(1-p)^{n-k}=1-\sum_{k=0}^{3}C_{100}^k(0.04)^k\cdot(0.96)^{100-k}$

(2) $\lambda=100\times0.04=4,$

$$\therefore P=1-\frac{4^0}{0!}e^{-4}-\frac{4^1}{1!}e^{-4}-\frac{4^2}{2!}e^{-4}-\frac{4^3}{3!}e^{-4}=1-e^{-4}\left(1+4+8+\frac{32}{3}\right)\approx0.56$$

四．

$$f(s)=\begin{cases}0, & s\le0\\ -\ln s, & 0<s\le1\\ 0, & s>1\end{cases}$$

六．(1) $X_3\sim\begin{pmatrix}-1 & 1\\ \frac{b}{r+b} & \frac{r}{r+b}\end{pmatrix}$

(2) $\rho=\frac{\operatorname{cov}(X_1,X_2)}{\sqrt{DX_1}\sqrt{DX_2}}=\frac{EX_1X_2-EX_1EX_2}{\sqrt{DX_1}\sqrt{DX_2}}=\frac{EX_1X_2-(EX_1)^2}{EX_1^2-(EX_1)^2}$

由(1)知，$EX_1=EX_2=\frac{r-b}{r+b}$，$EX_1^2=EX_2^2=1$，

由 $P(X_1X_2=1)=\frac{r+1}{2r+1}$（当 $b=r$ 时），$P(X_1X_2=-1)=\frac{r}{2r+1}$，$\therefore EX_1X_2=\frac{1}{2r+1}$

$\therefore\rho=\frac{1}{2r+1}$

七．(1) $\hat{\mu}_L=\frac{1}{9}\sum_{i=1}^{9}x_i=99.98$，(2) (0.77, 4.4)，

(3) 统计量 $W=\frac{\bar{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}}\sim t(n-1)\sim t(8)$，其拒绝域为 $(-\infty,-1.8595)$

其观测值为 1/200，不再拒绝域之内，接受 $\mu\ge\mu_0=100\text{kg}$ 的假设