A 四 B 三 (1)

$$1=\int_0^1\int_0^1 C(x+y)dxdy=2C\int_0^1 xdx\int_0^1 dy=C.$$

(2)

$$f_X(x)=\int_0^1 C(x+y)dy=C\left(x+\frac{1}{2}\right)=x+\frac{1}{2},\quad 0<x<1.$$

同理，

$$f_Y(y)=y+\frac{1}{2},\quad 0<y<1,$$

X,Y 不独立。

(3)

$$E(X^mY^n)=\int_0^1\int_0^1 x^my^nf(x,y)dxdy=\int_0^1\int_0^1 x^{m+1}y^n+x^my^{n+1}dxdy$$
$$=\frac{1}{(m+2)(n+1)}+\frac{1}{(m+1)(n+2)}=\frac{2mn+3(m+n)+4}{(m+1)(m+2)(n+1)(n+2)},$$

(4) 由 (3) 知 $EX^2=EY^2=\frac{1}{4}+\frac{1}{6}=\frac{5}{12}$， $E(XY)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$，

$$E(Y-aX)^2=a^2EX^2-2aE(XY)+EY^2=\frac{5}{12}a^2-\frac{2}{3}a+\frac{5}{12}=\frac{5}{12}(a-4/5)^2+\frac{3}{20}$$

在 $a=4/5$ 时达到最小值 3/20 。

(5) 条件密度函数

$$f_{Y|X}(y|x)=\frac{x+y}{x+1/2},\quad 0<y<1,0<x<1.$$

因此条件期望

$$E(Y|X=x)=\int_0^1 yf_{Y|X}(y|x)dy=\frac{x}{2x+1}+\frac{1}{3x+3/2}=\frac{3x+2}{6x+3}.$$

从而

$$E(Y|X)=\frac{3X+2}{6X+3}.$$

(6)

$$f_{U,V}(u,v)=f_{X,Y}\left(\frac{u+v}{2},\frac{u-v}{2}\right)\frac{1}{2}=\frac{u}{2}I_{0<u+v<2,0<u-v<2}.$$

AB 五 (1) 由

$$EX=0,\quad EX^2=DX=\frac{(2\sqrt{\theta})^2}{12}=\frac{\theta}{3},$$

得到 θ 的矩估计为

$$\hat\theta_1=\frac{3}{n}\sum_{i=1}^n X_i^2,$$

再由

$$EX^4=\int_{-\sqrt\theta}^{\sqrt\theta}\frac{x^4}{2\sqrt\theta}dx=\frac{\theta^2}{5},\qquad D(X^2)=\frac{\theta^2}{5}-\frac{\theta^2}{9}=\frac{4\theta^2}{45},$$

及中心极限定理，得到渐近分布 $N\left(\theta,\frac{4\theta^2}{5n}\right)$。

(2) 似然函数

$$L(\theta)=\prod_{i=1}^n\frac{1}{2\sqrt\theta}I_{|x_i|<\sqrt\theta}=\frac{1}{2^n\theta^{n/2}}I_{\max\limits_{1\le i\le n}x_i^2<\theta},$$

因其单调性，在 $\max\limits_{1\le i\le n}x_i^2$ 处取最大值，因此

$$\hat\theta_2=\max_{1\le i\le n}X_i^2$$

是 θ 的极大似然估计。

(3)

$$F_{\hat\theta_2/\theta}(t)=P(\max_{1\le i\le n}X_i^2\le t\theta)=\left[P(|X_1|\le\sqrt{t\theta})\right]^n=\left(\frac{2\sqrt{t\theta}}{2\sqrt\theta}\right)^n=t^{n/2},\quad 0<t<1;$$

$$f_{\hat\theta_2/\theta}(t)=\frac{n}{2}t^{\frac{n}{2}-1},\quad 0<t<1.$$

(4) 由

$$E\hat\theta_1=3EX^2=\theta,\quad E\hat\theta_2=\theta\int_0^1 tf_{\hat\theta_2/\theta}(t)dt=\frac{n\theta}{n+2}\int_0^1\frac{n+2}{2}t^{\frac{n+2}{2}-1}dt=\frac{n\theta}{n+2},$$

得 θ 的两个无偏估计： $\hat\theta_1$ 和 $\frac{n+2}{n}\hat\theta_2$，它们的方差为

$$D\hat\theta_1=E(\hat\theta_1-\theta)^2=\frac{9}{n}D(X^2)=\frac{4\theta^2}{5n}.$$

$$D\left(\frac{n+2}{n}\hat\theta_2\right)=\theta^2\int_0^1\left(\frac{(n+2)}{n}t-1\right)^2\frac{n}{2}t^{\frac{n}{2}-1}dt$$
$$=\theta^2\left(\frac{(n+2)^2}{n(n+4)}\int_0^1\frac{n+4}{2}t^{\frac{n+4}{2}-1}dt-2\int_0^1\frac{n+2}{2}t^{\frac{n+2}{2}-1}dt+\int_0^1\frac{n}{2}t^{\frac{n}{2}-1}dt\right)$$
$$=\theta^2\left(\frac{(n+2)^2}{n(n+4)}-1\right)=\frac{4\theta^2}{n(n+4)},$$