清华大学本科生考试试题专用纸　（ A 卷 ）

考试课程：概率论与数理统计　　考试时间：2007 年 1 月 10 日 14:30-16:30

姓名 陈晓东　　学号 2007010293　　班级 水工73

标准正态分布 $N(0,1)$ 的分布函数值：	x	1.46	1.645	1.96	2	2.46
	$\Phi(x)$	0.928	0.950	0.975	0.977	0.993

一、填空。（每空 2 分，共 38 分。直接将答案填在划线处．如果最终结果用小数表示，请精确到小数点后第 3 位。）

1. 设 $X \sim U(0,1)$ 。以下判断正确的是 B 。
   A： "事件 $\{X=0.5\}$ 是不可能事件"； B： "事件 $\{X=0.5\}$ 是零概率事件"。
2. 设事件 A_1, A_2, A_3 相互独立，且 $P(A_i)=1/3$（ $i=1,2,3$ ）。则这三个事件中至少有一个发生的概率为 $\frac{19}{27}$ ；这三个事件中恰好有一个发生的概率为 $\frac{4}{9}$ 。
3. 工厂 A 和工厂 B 的产品次品率分别是 1% 和 2%。现从 A 、B 两厂产品各占 60% 和 40% 的一批产品中随机选取一件，则该产品是次品的概率为 1.40 %。如果发现这个产品是次品，那么它是工厂 A 生产的概率为 $\frac{3}{7}$ 。
4. 设随机变量 X 和 Y 均服从 $N(0,1)$, 则以下判断正确的是 C 。
   A： $X+Y$ 服从正态分布；　　B： X^2+Y^2 服从 χ^2 分布；
   C： X^2 和 Y^2 都服从 χ^2 分布；　　D： X^2/Y^2 服从 F 分布。
5. 某人有 n 把钥匙，其中只有一把能打开自己的家门，他随意地试开。如果他每次把试过的钥匙又混杂进去，则打开门所需试开次数 X 的数学期望为 n 。如果他每次把不能打开的钥匙剔除，则打开门所需试开次数 Y 的数学期望为 $\frac{n+1}{2}$ 。
6. 现有一个容量为 9 、来自正态总体 $N(\mu, 0.81)$ 的简单随机样本，其样本均值为 5 ，则未知参数 μ 的置信水平为 0.95 的置信区间为 [4.412, 5.588] 。
7. 设 $x_1,\ldots,x_4$ 为来自正态总体 $N(\mu,4^2)$ 的简单随机样本，$\bar{x}$ 为样本均值. 在显著性水平 $\alpha=0.05$ 下考虑检验问题： $H_0: \mu=5$ vs $H_1: \mu\neq 5$. 其拒绝域为 $\{|\bar{x}-5|\geq k\}$, 则 $k=$ 3.92 。该检验问题在真值 $\mu=6$ 时犯第二类错误的概率为 0.921 。
8. 设 X,Y 相互独立， $P(X=1)=P(X=2)=1/2$ ，Y 服从指数分布 Exp(1) 。则 XY 的分布函数 $F(z)=$ ~~$\frac{1}{2}(e^{-z}+e^{-\frac{z}{2}})$~~ $1-\frac{1}{2}(e^{-z}+e^{-\frac{z}{2}})$ ，密度函数 $f(z)=\frac{1}{2}(e^{-z}+\frac{1}{2}e^{-\frac{z}{2}})$ 。
9. 设 $X_1,\ldots,X_{100}$ 是来自正态总体 $N(\mu,\mu^2)$（ $\mu>0$ ）的简单随机样本，样本均值为 $\bar{X}$ 。则 $10(\mu^{-1}\bar{X}-1)$ 服从 ~~$N(0,\frac{1}{100})$~~ $N(0,1)$（分布名称及参数）。如果正数 C 满足 $P(\bar{X}/C\geq\mu)=5\%$ ，则 $C=$ 1.165 。
10. 设 $g:[0,1]\to\mathbb{R}$ 连续，记 $A=\int_0^1 g(x)dx$ ， $B=\int_0^1[g(x)]^2dx$ ， $B\neq A^2$ 。设 $X_1, X_2, \ldots$

$F(z)=P(XY\leq z)$
$=P(X=1)P(Y\leq z|X=1)+$

$\frac{Q_n-A}{\sqrt{Var\,Q_n}} \sim N(0,1)$

独立，都服从均匀分布 $U[0,1]$ 。则当 $n\to\infty$ 时， $Q_n := \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} g(X_k)$ 依概率 A 。当 n 充分大时，$\sqrt{n}(Q_n-A)$ 的近似分布为 ~~$N(0,1)$~~ $N(0,B-A^2)$（分布名称及参

11. 设 X 的概率密度为 $f(x)=C/x^2$ ， $|x|\geq 1$ 。则常数 $C=\frac{1}{2}$ 。以下判断中是 B 。
    A： X 的数学期望存在且等于零； B： X 不存在数学期望。

二、（ 8 分 ）一生产线生产的产品成箱包装，每箱的重量是随机的。设每箱重量为 50 公斤，标准差为 5 公斤。若用最大载重量为 5000 公斤的汽车承运中心极限定理说明每辆车最多可以装多少箱，才能保证不超载的概率大于 0.

三、（ 16 分，每问 4 分 ）独立重复掷一枚硬币，每次抛掷得到正面的概率为 $0<p$ 到第 X 次掷币时首次得到正面，到第 Y 次掷币时刚好得到累计两次正面。

1. 求 X,Y 的联合概率分布列以及边缘概率分布列； $P(X=i)=p(1-p)^{i-1}$
2. 求在已知 $X=k$ 的条件下， $Y-X$ 的条件分布列；并判断 $X, Y-X$ 是否
3. 求 EX 和 EY ； $\frac{2}{p}$　　$P(Y-X=m)=(1-p)^{m-1}p$
4. 求 X,Y 的相关系数。

四、（ 18 分，每问 3 分 ）设二维随机向量 (X,Y) 的联合概率密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases} C(x+y), & 若 0<x<1 且 0<y<1; \\ 0, & 否则. \end{cases}$$

1. 求 C 的值； 1
2. 求 X 和 Y 的边缘概率密度函数，并判断 X,Y 是否独立； $x+\frac{1}{2}$　$y+\frac{1}{2}$
3. 求 $E(X^mY^n)$ ，其中 m,n 是非负整数；
4. 求使得 $E(Y-aX)^2$ 达到最小值时的 a 值；
5. 求条件期望 $E(Y|X)$ ；
6. 求 $U=X+Y, V=X-Y$ 的联合概率密度函数。

五、（ 20 分，每问 4 分 ）设 $X_1,\ldots,X_n$ 是来自总体 $U(-\sqrt{\theta},\sqrt{\theta})$ 的简单随机样本，其中 $\theta>0$ 是未知参数。 $\hat{\theta}_1=3S$

1. 求 θ 的矩估计量 $\hat{\theta}_1$ ，以及当样本容量 $n\to\infty$ 时 $\hat{\theta}_1$ 的渐近分布； ?
2. 求 θ 的极大似然估计量 $\hat{\theta}_2$ ；
3. 求常数 c_1, c_2 使得 $\eta_1=c_1\hat{\theta}_1$ 和 $\eta_2=c_2\hat{\theta}_2$ 均为 θ 的无偏估计；
4. 上述两个无偏估计 η_1 和 η_2 中，哪一个更有效性？
5. 问： $\hat{\theta}_1$ 和 $\hat{\theta}_2$ 是不是 θ 的相合估计？为什么？

2006-2007 学年秋季学期概率论与数理统计
试题答案和评分标准

AB 一、填空。

题号	答案	题号	答案
A1	B	B1	B
A2	19/27， 4/9	B2	19/27， 4/9
A3	1.4， 3/7	B3	1.4， 3/7
A4	C	B4	3.92， 0.921
A5	n， $(n+1)/2$	B5	$1-(e^{-z}+e^{-z/2})/2, z>0$， $(e^{-z}+e^{-z/2})/2, z>0$
A6	$[4.412, 5.588]$	B6	$N(0,1)$， 1.1645
A7	3.92， 0.921	B7	C
A8	$1-(e^{-z}+e^{-z/2})/2, z>0$， $(e^{-z}+e^{-z/2})/2, z>0$	B8	n， $(n+1)/2$
A9	$N(0,1)$， 1.1645	B9	$[4.412, 5.588]$
A10	A， $N(0, B-A^2)$	B10	A， $N(0, B-A^2)$
A11	1/2， B	B11	1/2， B

AB 二 设 $X_1, \ldots, X_n$ 是各箱重量，它们独立同分布，不超载的概率为

$$P(X_1+\cdots+X_n \le 5000) \ge 0.977 = \Phi(2).$$

由中心极限定理知对充分大的 n，

$$P\left(\frac{X_1+\cdots+X_n-n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \le \frac{5000-50n}{5\sqrt{n}}\right) \approx \Phi\left(\frac{5000-50n}{5\sqrt{n}}\right),$$

其中， $\mu = EX_1 = 50$ 公斤， $\sigma = \sqrt{DX_1} = 5$ 公斤。因此，当

$$\frac{5000-50n}{5\sqrt{n}} > 2,$$

即

$$25n^2 - 5001n + 25\times 10^4 > 0, \qquad 5000-500n > 0,$$

即

$$n < \frac{5001-\sqrt{5001^2-4\times 25^2\times 10^4}}{50} = \frac{5001-\sqrt{5001+5000}}{50} \approx \frac{5001-100}{50} = 98.02,$$

98 时，不超载的概率大于 0.977。

A 三 B 四 (1) X 服从几何分布 $G(p)$，分布列为

$$P(X=k) = pq^{k-1}, \qquad k=1,2,\ldots.$$

Y 的概率分布列为

$$P(Y=n) = C_{n-1}^1 p^2 q^{n-2} = (n-1)p^2q^{n-2}, \qquad n=2,3,\ldots.$$

联合概率分布为

$$P(X=k, Y=n) = p^2q^{n-2}, \qquad k=1,2,\ldots,n-1; n=2,3,\ldots.$$

(2)

$$P(Y-X=n|X=k) = \frac{P(X=k, Y=n+k)}{P(X=k)} = \frac{p^2q^{n+k-2}}{pq^{k-1}} = pq^{n-1}.$$

即在已知 $X=k$ 发生的条件下， $Y-X$ 服从几何分布 $G(p)$。

(3) 由 (2) 知， $X=k$ 时 $Y-X$ 的条件分布与 k 无关，所以 $Y-X$ 与 X 独立。

$$P(X=k, Y-X=n) = P(X=k, Y=n+k) = p^2q^{n+k-2} = pq^{k-1}\cdot pq^{n-1}, \quad \forall k, n\ge 1,$$

所以 X 与 $Y-X$ 独立。

(4)

$$EX = \sum_{k=1}^{\infty} kpq^{k-1} = \frac{1}{p},$$
$$EY = EX + E(Y-X) = \frac{2}{p}.$$

(5)

$$DX = EX(X-1) + EX - (EX)^2 = \sum_{k=1}^{\infty} k(k-1)pq^{k-1} + \frac{1}{p} - \frac{1}{p^2}$$
$$= \frac{2pq}{p^3} + \frac{1}{p} - \frac{1}{p^2} = \frac{q}{p^2},$$
$$DY = D[X+(Y-X)] = DX + D(Y-X) = \frac{2q}{p^2},$$
$$\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathrm{Cov}(X,X) + \mathrm{Cov}(X, Y-X) = DX = \frac{q}{p^2},$$

于是

$$r_{X,Y} = \frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sqrt{DX\cdot DY}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$