《概率论》期末考试试题

1. 一本书共有 1,000,000 个印刷符号，排版时每个符号被排错的概率为 0.0001，校对时每个排版错误被改正的概率为 0.9，求在校对后错误不多于 15 个的概率.

2. 某赌庄有资产 100,000 元. 另有一赌徒拥有无穷大的赌资，试图使该赌庄破产. 他每次压注 1000 元，每次赢钱的概率为 0.49 而输钱的概率为 0.51. 问该赌徒能使赌庄破产的概率为多大?

3. 考虑$[0,\infty]$上的 Poisson 过程，参数为λ. T是与该 Poisson 过程独立的随机变量，服从参数为μ的指数分布. 以N_T表示$[0, T]$中 Poisson 过程的增量，求N_T的概率分布.

4. 设$\xi_1\xi_2\cdots\cdots\xi_n$是独立同分布随机变量，且三阶中心矩等于零，四阶矩存在，求$\bar{\xi}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\xi_k$和$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(\xi_k-\bar{\xi})^2$的相关系数.

5. 设 X 是连续型随机变量，密度函数 $f_X(x)=(1/2)\exp(-|x|)$，$-\infty< x <\infty$.
   a. 证明特征函数$\varphi_X(t)=1/(1+t^2)$.
   b. 利用上述结果和逆转公式来证明

$$e^{-|x|}=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-ixt}\frac{1}{\pi(1+t^2)}dt=\int_{-\infty}^{\infty}e^{ixt}\frac{1}{\pi(1+t^2)}dt$$

6. 设随机变量序列ξ_n依概率收敛于非零常数 a，而且$\xi_n\neq0$. 证明 $1/\xi_n$依概

率收敛于 1/a.

7. 假设 X 与 Y 是连续型随机变量.记 Var[Y|X=x]为给定 X=x 的条件下 Y 的方差.如果 E[Y|X=x]= μ 与 X 无关，证明 EY= μ 而且 VarY= $\int_{-\infty}^{\infty} Var[Y \mid X=x] f_X(x) dx$.

8. 设{ξ_n}为独立随机变量序列，且ξ_n服从(-n, n)上的均匀分布，证明对{ξ_n}中心极限定理成立.

9. 设 X,Y 和 Z 的数学期望均为 0，方差均为 1. 设 X 与 Y 的相关系数为ρ_1, Y 与 Z 的相关系数为ρ_2，X 与 Z 的相关系数为ρ_3. 证明 $\rho_3 \geq \rho_1\rho_2 - \sqrt{1-\rho_1^2}\sqrt{1-\rho_2^2}$.

10. 用概率方法证明如下 Weierstrass 定理:对区间[0,1]上任何连续函数 f(x)，必存在多项式序列{$b_n(x)$}，使在区间[0,1]上一致地有 $b_n(x) \to f(x)$.

附：常用正态分布函数值：Φ(1.28)= 0.9，Φ(2)= 0.977，Φ(2.33)= 0.99，Φ(2.58)= 0.995

Φ(1.64)= 0.95，Φ(1.96)= 0.975,