概率论试题（2004-2005 学年第一学期）（含答案）

一．单项选择题（每小题 3 分，共 15 分）

1．设事件 A 和 B 的概率为 $P(A)=\frac{1}{2},P(B)=\frac{2}{3}$ 则 $P(AB)$ 可能为（　）

(A) 0;　　(B) 1;　　(C) 0.6;　　(D) 1/6

2. 从 1、2、3、4、5 这五个数字中等可能地、有放回地接连抽取两个数字,则这两个数字不相同的概率为（　）

(A) $\frac{1}{2}$;　　(B) $\frac{2}{25}$;　　(C) $\frac{4}{25}$;　　(D)以上都不对

3．投掷两个均匀的骰子，已知点数之和是偶数，则点数之和为 6 的概率为（　）

(A) $\frac{5}{18}$;　　(B) $\frac{1}{3}$;　　(C) $\frac{1}{2}$;　　(D)以上都不对

4．某一随机变量的分布函数为 $F(x)=\frac{a+be^x}{3+e^x}$，则 $F(0)$ 的值为（　）

(A) 0.1;　　(B) 0.5;　　(C) 0.25;　　(D)以上都不对

5．一口袋中有 3 个红球和 2 个白球，某人从该口袋中随机摸出一球，摸得红球得 5 分，摸得白球得 2 分，则他所得分数的数学期望为（　）

(A) 2.5;　　(B) 3.5;　　(C) 3.8;　　(D)以上都不对

二．填空题（每小题 3 分，共 15 分）

1．设 A、B 是相互独立的随机事件，$P(A)$=0.5, $P(B)$=0.7, 则 $P(A\cup B)$=_____.

2．设随机变量 $\xi\sim B(n,p)$, $E(\xi)=3$, $D(\xi)=1.2$，则 n=______.

3．随机变量 ξ 的期望为 $E(\xi)=5$，标准差为 $\sigma(\xi)=2$，则 $E(\xi^2)$=_______.

4．甲、乙两射手射击一个目标，他们射中目标的概率分别是 0.7 和 0.8.先由甲射击，若甲未射中再由乙射击。设两人的射击是相互独立的，则目标被射中的概率

为________.

5．设连续型随机变量ξ 的概率分布密度为 $f(x)=\dfrac{a}{x^2+2x+2}$，a 为常数，则 $P(\xi \geqslant 0)$=_______.

三．(本题 10 分)将 4 个球随机地放在 5 个盒子里，求下列事件的概率
(1)　4 个球全在一个盒子里;
(2) 恰有一个盒子有 2 个球.

四．(本题 10 分) 设随机变量ξ 的分布密度为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{A}{1+x}, & \text{当}0\leqslant x\leqslant 3\\ 0, & \text{当}x<0\text{或}x>3\end{cases}$$

(1)　求常数 A;　(2) 求 $P(\xi<1)$;　　(3) 求ξ 的数学期望.

五．(本题 10 分) 设二维随机变量(ξ ,η)的联合分布是

	$\eta=1$	$\eta=2$	$\eta=4$	$\eta=5$
$\xi=0$	0.05	0.12	0.15	0.07
$\xi=1$	0.03	0.10	0.08	0.11
$\xi=2$	0.07	0.01	0.11	0.10

(1)　ξ 与η 是否相互独立?　(2) 求$\xi\cdot\eta$的分布及$E(\xi\cdot\eta)$；

六．(本题 10 分)有 10 盒种子，其中 1 盒发芽率为 90％，其他 9 盒为 20％.随机选取其中 1 盒，从中取出 1 粒种子，该种子能发芽的概率为多少？若该种子能发芽，则它来自发芽率高的 1 盒的概率是多少？

七．(本题 12 分) 某射手参加一种游戏，他有 4 次机会射击一个目标.每射击一次须付费 10 元. 若他射中目标，则得奖金 100 元，且游戏停止. 若 4 次都未射中目标，则游戏停止且他要付罚款 100 元. 若他每次击中目标的概率为 0.3,求他在此游戏中的收益的期望.

八．(本题 12 分)某工厂生产的零件废品率为 5％，某人要采购一批零件，他希望以 95％的概率保证其中有 2000 个合格品.问他至少应购买多少零件？

(注：$\Phi(1.28)=0.90, \Phi(1.65)=0.95$)

九．(本题 6 分)设事件 A、B、C 相互独立，试证明 $A\cup B$ 与 C 相互独立.

某班有 50 名学生，其中 17 岁 5 人，18 岁 15 人，19 岁 22 人，20 岁 8 人，则该班学生年龄的样本均值为________.

十．测量某冶炼炉内的温度，重复测量 5 次，数据如下（单位：℃）：

1820，1834，1831，1816，1824

假定重复测量所得温度$\xi \sim N(\mu,\sigma^2)$.估计$\sigma=10$，求总体温度真值μ 的 0.95 的置信区间. (注：$\Phi(1.96)=0.975, \Phi(1.65)=0.95$)

解：$\bar{\xi}=\frac{1}{5}(1820+1834+1831+1816+1824)=1825$ -------------------2 分

已知$1-\alpha=0.95,\ \ \alpha=0.05$，$u_{\frac{\alpha}{2}}=u_{0.025}=1.96$ ---------------------------5 分

$\sigma=10$，n=5, $u_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}=u_{0.025}\frac{10}{\sqrt{5}}=\frac{1.96\times 10}{\sqrt{5}}=8.77$ -------------------8 分

所求真值μ 的 0.95 的置信区间为[1816.23, 1833.77]（单位：℃）-------10 分

解答与评分标准

一．1.（D）、2.（D）、3.（A）、4.（C）、5.（C）

二．1．0.85、2. n=5、3. $E(\xi^2)$=29、4. 0.94、5.　3/4

三．把 4 个球随机放入 5 个盒子中共有 5^4=625 种等可能结果--------------3 分

（1）A={4 个球全在一个盒子里}共有 5 种等可能结果,故

$P(A)$=5/625=1/125--5 分

(2) 5 个盒子中选一个放两个球，再选两个各放一球有

$C_5^1 C_4^2=30$ 种方法---7 分

4 个球中取 2 个放在一个盒子里，其他 2 个各放在一个盒子里有 12 种方法

因此，B={恰有一个盒子有 2 个球}共有 4×3=360 种等可能结果.故

$P(B)=\frac{360}{625}=\frac{72}{125}$ --10 分

四．解：（1）$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx=\int_0^3 \frac{A}{1+x}dx=A\ln 4, A=\frac{1}{\ln 4}$ ---------------------3 分

（2）$P(\xi<1)=\int_0^1 \frac{A}{1+x}dx=A\ln 2=\frac{1}{2}$ ------------------------------6 分

（3）$E(\xi)=\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx=\int_0^3 \frac{Ax}{1+x}dx=A[x-\ln(1+x)]_0^3$

$=\frac{1}{\ln 4}(3-\ln 4)=\frac{3}{\ln 4}-1$ ------------------------------------10 分

五．**解**：（1）ξ 的边缘分布为

$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0.39 & 0.32 & 0.29 \end{pmatrix}$ -------------------------------2 分

η 的边缘分布为

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 5 \\ 0.15 & 0.23 & 0.34 & 0.28 \end{pmatrix}$$ ---------------------------4 分

因 $P(\xi=0,\eta=1)=0.05\neq P(\xi=0)P(\eta=1)$,故ξ 与η 不相互独立-------5 分

（2）$\xi\cdot\eta$ 的分布列为

$\xi\cdot\eta$	0	1	2	4	5	8	10
P	0.39	0.03	0.17	0.09	0.11	0.11	0.10

因此，

$$E(\xi\cdot\eta)=0\times0.39+1\times0.03+2\times0.17+4\times0.09+$$
$$5\times0.11+8\times0.11+10\times0.10=3.16$$

-------10 分

另解：若ξ 与η 相互独立,则应有
P(ξ ＝0,η ＝1)＝P(ξ ＝0)P(η ＝1); P(ξ ＝0,η ＝2)＝P(ξ ＝0)P(η ＝2);
P(ξ ＝1,η ＝1)＝P(ξ ＝1)P(η ＝1); P(ξ ＝1,η ＝2)＝P(ξ ＝1)P(η ＝2);
因此，

$$\frac{P(\xi=0,\eta=1)}{P(\xi=1,\eta=1)}=\frac{P(\xi=0,\eta=2)}{P(\xi=1,\eta=2)}=\frac{P(\xi=0)}{P(\xi=1)}$$

但 $\frac{0.05}{0.03}\neq\frac{0.12}{0.10}$，故ξ 与η 不相互独立。

六．解：由全概率公式及 Bayes 公式
P(该种子能发芽)＝0.1×0.9+0.9×0.2＝0.27-----------------------------------5 分
P(该种子来自发芽率高的一盒)＝(0.1×0.9)/0.27＝1/3---------------------10 分

七．令 A_k={在第 k 次射击时击中目标}，A_0={4 次都未击中目标}。
于是 $P(A_1)=0.3$; $P(A_2)=0.7\times0.3=0.21$; $P(A_3)=0.7^2\times0.3=0.147$
$P(A_4)=0.7^3\times0.3=0.1029$;　　$P(A_0)=0.7^4=0.2401$-----------------------------------6 分
在这 5 种情行下，他的收益ξ 分别为 90 元，80 元，70 元，60 元，－140 元。
---8 分
因此，

$$E(\xi)=0.3\times90+0.21\times80+0.147\times70+0.1029\times60+$$
$$0.2401\times(-140)=26.65$$

--------------------12 分

八．解：设他至少应购买 *n* 个零件，则 *n*≥2000，设该批零件中合格零件数ξ 服从二项分布 B(n,p), p=0.95. 因 *n* 很大，故 B(n,p)近似与 *N*(*np*,*npq*) ------------4 分
由条件有

$P(\xi \geq 2000) \approx 1-\Phi(\frac{2000-np}{\sqrt{npq}})=0.95$ ---8 分

因 $\Phi(1.65)=0.95$，故 $\frac{200-np}{\sqrt{npq}}=-1.65$，解得 n=2123,

即至少要购买 2123 个零件. ---12 分

九．证：因 A、B、C 相互独立，故 P(AC)=P(A)P(C), P(BC)=P(B)P(C), P(AB)=P(A)P(B), P(ABC)=P(A) P(B)P(C).

$P((A\cup B)C)=P(AC\cup BC)=P(AC)+P(BC)-P(ABC)$ ------2 分

$=P(A)P(C)+P(B)P(C)-P(A)P(B)P(C)$ ---------------------------4 分

$=[P(A)+P(B)-P(A)P(B)]P(C)=P(A\cup B)P(C)$

故 $A\cup B$ 与 C 相互独立. ---6 分