“概率论与数理统计”第五次习题课题目

题1 设总体X在区间$[0,\theta]$上服从均匀分布，其中θ为位置参数，$X_1,X_2,...,X_n$是来自总体X的简单随机样本。

1. 求θ的矩估计量$\hat{\theta}_1$；
2. 求θ的最大似然估计量$\hat{\theta}_2$；
3. 讨论$\hat{\theta}_1,\hat{\theta}_2$的无偏性；
4. 求常数C_1,C_2，使得$\eta_1=C_1\hat{\theta}_1$和$\eta_2=C_2\hat{\theta}_2$ 均为θ的无偏估计；
5. 上述两个无偏估计量η_1,η_2，那个更有效;
6. 讨论$\hat{\theta}_1,\hat{\theta}_2$的相合性。

题2 设总体X具有概率密度：

$$p(x)=\begin{cases}\frac{1}{\theta^2}xe^{-\frac{x}{\theta}}, & x>0;\\ 0, & x\le 0.\end{cases}$$

其中$\theta>0$为未知参数，$X_1,X_2,...,X_n$是来自X的样本，$x_1,x_2,...,x_n$是相应的样本观察值。

1. 求θ的最大似然估计量；
2. 求θ的矩估计量；
3. 问求得的估计量是否是无偏估计量。

题3 设$X_1,X_2,...,X_{n+1}$是来自正态总体的简单样本，$X_1,X_2,...,X_n$的样本均值和样本二阶中心矩分别为$\bar{X}$和S_n^2，求$\frac{X_{n+1}-\bar{x}}{S_n}\sqrt{\frac{n-1}{n+1}}$的分布。

题4 设$x_1,x_2,...,x_n$为抽自正态总体$N(\mu,\sigma^2)$的简单样本。

1. 如果$\sigma=4$，为使得μ的置信水平为$1-\alpha$的置信区间的长度不大于给定L，试问样本容量至少要多少？
2. 如果σ未知，在已知样本的容量、均值和标准差分别为$n,\bar{x},s$的前提下，试以$1-\alpha$ 把握估计最小的μ的值.

题5 设$X_1,...,X_{16}$是来自正态总体$N(\mu,1)$的样本，这里$\mu\geq 0$是未知参数。对以下原假设和备择假设

$$H_0:\mu=0\ vs\ H_1:\mu>0,$$

若取拒绝域为$\{(x_1,...,x_{16}):\bar{x}>0.5\}$，试求(结果可用标准正态分布函数$\phi(x)$表示)

1. 此检验犯的第一类错误的概率；
2. 当$\mu=1$时此检验犯的第二类错误的概率；

题6 设$x_1,...,x_{16}$是来自正态总体$N(\mu,4)$的样本，考虑检验问题

$$H_0:\mu=6\ vs\ H_1:\mu\neq 6,$$

拒绝域取为$W=\{|\bar{x}-6|\geq c\}$，试求c使得检验的显著性水平为0.05，并求该检验在$\mu=6.5$处犯第二类错误的概率。

题7 设需要对某正态总体的均值进行假设检验

$$H_0:\mu=15\ vs\ H_1:\mu<15.$$

已知$\sigma^2=2.5$，取$\alpha=0.05$，若要求当H_1中的$\mu\leq 13$时犯的第二类错误的概率不超过0.05，求所需的样本容量。

题8 假定考生成绩服从正态分布，在某地一次数学考试中，随机抽取了36位考生的成绩，算得平均成绩为66.5分，标准差为15分，现要对“这次考试的平均成绩是否为70分”做出判断，

1. 构造相应假设检验，并求该检验的p值；
2. 在显著性水平为0.05下，是否可以认为这次考试的平均成绩为70分？

题9 设 $x_1,\ldots,x_n$ 是来自正态总体$N(\mu,\sigma^2)$的一个样本,对σ^2考虑如下三个估计

$$\hat{\sigma}_1^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2,\hat{\sigma}_2^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2,\hat{\sigma}_3^2=\frac{1}{n+1}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2$$

(1)哪一个是σ^2的无偏估计？

(2)哪一个均方误差最小?