

概率论与数理统计第二次习题课

1. 设随机变量 X 服从 $(-\pi/2, \pi/2)$ 上的均匀分布, 求随机变量 $Y = \cos(X)$ 的密度函数。
2. 设 $X \sim U(-1, 2)$, 求 $Y = |X|$ 以及 $Y = X^2$ 的概率密度函数。
3. 设随机变量 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, 求 $E|X - \mu|$ 。
4. 设 $f(x)$ 为凸函数, X 为一随机变量, 则 $E[f(X)] \geq f(E[X])$, 只要不等号两边的期望均存在。
5. (1) 设离散型随机变量 X 仅取非负整数, 若其期望存在, 则 $E[X] = \sum_{i=1}^{\infty} P(X \geq k)$ 。
(2) 设 X 为非负连续随机变量, 且其期望和方差均存在, 则 $E[X] = \int_0^{\infty} P(X > x) dx$, $E(X^2) = \int_0^{\infty} 2xP(X > x) dx$ 。
(3) 袋中有 r 个红球与 b 个黑球, 现任意一一取出, 直到取出红球为止, 求取球次数的数学期望。
(4) 设 X 为非负连续随机变量, $P(X > x) = \exp(-x^2), x > 0$, 求 $E(X)$ 和 $Var(X)$ 。
6. 某班 n 个战士各有1支归个人保管使用的枪, 这些枪的外形完全一样, 在一次夜间紧急集合中, 每人随机地取了1支枪, 求恰好拿到自己枪的战士的人数的期望。
7. 设 X 为仅取非负整数的离散型随机变量, 若 X 的分布具有无记忆性, 即对于任意自然数 m, n , 都有 $P(X > m + n | X > m) = P(X > n)$, 则 X 的分布一定是几何分布。
8. 假设一设备开机后无故障工作的时间 X 服从参数为 $1/5$ 的指数分布。设备定时开机, 出现故障时自动关机, 而在无故障的情况下工作两小时便关机。试求该设备每次开机无故障工作时间 Y 的分布函数。
9. 学生完成一道作业的时间 X 是一个随机变量, 单位为小时, 它的密度函数为
$$y = \begin{cases} cx^2 + x & \text{if } 0 \leq x \leq 0.5 \\ 0 & \text{others} \end{cases}$$
 - (1) 确定常数 c 。
 - (2) 写出 X 的分布函数。
 - (3) 试求在20分钟内完成一道作业的概率。
 - (4) 试求10分钟以上完成一道作业的概率。
10. 设 X 为连续性随机变量, 其密度函数为 $f(x)$ 。若 m 是 X 的分布的唯一的中心数且 b 是一个固定的实数, 证明 $E(|X - b|) = E(|X - m|) + 2 \int_m^b (b - x) f(x) dx$ 。
(假设以上期望均存在), 并求 $E(|X - b|)$ 取到最小值的 b 。