“概率论与数理统计“第四次习题课题目

1. 设相互独立的随机变量X_i分别服从参数为$\mu_i > 0, (i = 1, 2)$的指数分布，记

$$X = \min(X_1, X_2), I = \begin{cases} 1, X_1 < X_2, \\ 0, X_1 \geq X_2. \end{cases}$$

(1). 求X的概率分布函数，

(2). 求$P(X_1 < X_2)$，

(3). 求$E(X_1|X_1 < X_2)$，

(4).试证明I与X相互独立。

2. 设随机变量$X \sim N(\mu, 1), Y \sim N(0, 1)$，且$X$与$Y$相互独立，令

$$I = \begin{cases} 1, Y < X, \\ 0, Y \geq X. \end{cases}$$

试证明：

(1). $E(I|X = x) = \Phi(x)$，

(2). $E(\Phi(X)) = P(Y < X)$，

(3). $E(\Phi(X)) = \Phi(\mu/\sqrt{2})$.

3. 设随机变量X与Y独立同分布，都服从参数为λ的指数分布。令

$$Z = \begin{cases} 3X + 1, X \geq Y, \\ \quad 6Y, X < Y. \end{cases}$$

求E(Z).

4. 设X, Y服从平面区域

$$D = \{(x, y) : 0 \leq y \leq 1, 0 \leq x + y \leq 1\}$$

上的均匀分布。

(1).求条件数学期望$E(Y|X = 0)$的值。

(2).设$U = X/Y$。求条件数学期望$E(Y|U = 0)$的值。

5. 设随机变量序列$\{X_n\}$独立同分布，其密度函数为

$$p(x) = \begin{cases} e^{(-(x-\alpha))}, X \geq \alpha, \\ \quad 0, X < \alpha. \end{cases}$$

令$Y_n = \min(X_1, X_2, \cdots, X_n)$, 试证：$Y_n \xrightarrow{p} \alpha$.

6. 设随机变量序列$\{X_n\}$独立同分布，且$Var(X_n)=\sigma^2$存在，令

$$\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i,\quad S_n^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2.$$

试证：$S_n^2\xrightarrow{p}\sigma^2$.

7. 设$\{X_n\}$为同一分布，数学期望为μ，方差为σ^2的随机变量序列。当$i>1$ 时，X_i仅与X_{i-1},X_{i+1}相关。令

$$Y_n=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i, n=1,2,\cdots.$$

试证明：

(1).$\lim\limits_{n\to\infty}D(Y_n)=0$,

(2).$Y_n\xrightarrow{p}\mu$.

8. 设$\{X_n\}$为一独立同分布的随机变量序列，方差存在，令$Y_n=\sum_{i=1}^{n}X_i$, 又设$\{a_n\}$为一列常数，如果存在常数$c>0$,使得对一切的n有$|na_n|\le c$，证明$\{a_nY_n\}$服从大数定律。

9. 一报贩发现每个路过他的报摊的行人向他买报的概率为1/3。求在他出售了100份报纸时的过路人的数目在280人到320人之间的概率。

10. 为确定某城市成年男子中吸烟者的比例p，任意调查n个成年男子，记其中的吸烟人数为m，问n至少为多大才能保证m/n与p的差异小于0.01的概率大于0.95。

11. 设随机变量$X_1,X_2,\cdots,X_{100}$相互独立，且都服从$U(0,1)$，又设

$$Y=\prod_{i=1}^{100}X_i,$$

求$P(Y<10^{-40})$的近似值。

12. 用概率论方法证明：

$$\lim_{n\to\infty}(1+n+\frac{n^2}{2!}+\cdots+\frac{n^n}{n!})e^{-n}=\frac{1}{2}$$