8:57:33

条件概率：事件之间的相互影响

王晓峰
清华大学数学科学系
xfwang@tsinghua.edu.cn
62772865 理科楼1118房间

2008年9月26日

内容提要

1. 条件概率的定义
    - 相对频率
    - 条件概率
2. 条件概率在概率计算中的应用
    - 乘法公式：计算乘积事件的概率
    - 全概率公式：通过划分计算事件的概率
    - Bayes公式（逆概率公式）：基于概率的因果分析
3. 事件的独立性
    - 独立性的直观含义
    - 事件独立性的定义和性质
    - 应用：系统可靠性分析
    - 事件的相关系数
    - 独立试验

内容提要

1. 条件概率的定义
   - 相对频率
   - 条件概率
2. 条件概率在概率计算中的应用
   - 乘法公式：计算乘积事件的概率
   - 全概率公式：通过划分计算事件的概率
   - Bayes公式（逆概率公式）：基于概率的因果分析
3. 事件的独立性
   - 独立性的直观含义
   - 事件独立性的定义和性质
   - 应用：系统可靠性分析
   - 事件的相关系数
   - 独立试验

内容提要

1. 条件概率的定义
   - 相对频率
   - 条件概率
2. 条件概率在概率计算中的应用
   - 乘法公式：计算乘积事件的概率
   - 全概率公式：通过划分计算事件的概率
   - Bayes公式（逆概率公式）：基于概率的因果分析
3. 事件的独立性
   - 独立性的直观含义
   - 事件独立性的定义和性质
   - 应用：系统可靠性分析
   - 事件的相关系数
   - 独立试验

内容提要

1. 条件概率的定义
   - 相对频率
   - 条件概率
2. 条件概率在概率计算中的应用
   - 乘法公式：计算乘积事件的概率
   - 全概率公式：通过划分计算事件的概率
   - Bayes公式（逆概率公式）：基于概率的因果分析
3. 事件的独立性
   - 独立性的直观含义
   - 事件独立性的定义和性质
   - 应用：系统可靠性分析
   - 事件的相关系数
   - 独立试验

内容提要

1. 条件概率的定义
   - 相对频率
   - 条件概率
2. 条件概率在概率计算中的应用
   - 乘法公式：计算乘积事件的概率
   - 全概率公式：通过划分计算事件的概率
   - Bayes公式（逆概率公式）：基于概率的因果分析
3. 事件的独立性
   - 独立性的直观含义
   - 事件独立性的定义和性质
   - 应用：系统可靠性分析
   - 事件的相关系数
   - 独立试验

内容提要

1. 条件概率的定义
   - 相对频率
   - 条件概率
2. 条件概率在概率计算中的应用
   - 乘法公式：计算乘积事件的概率
   - 全概率公式：通过划分计算事件的概率
   - Bayes公式（逆概率公式）：基于概率的因果分析
3. 事件的独立性
   - 独立性的直观含义
   - 事件独立性的定义和性质
   - 应用：系统可靠性分析
   - 事件的相关系数
   - 独立试验

内容提要

1. 条件概率的定义
   - 相对频率
   - 条件概率
2. 条件概率在概率计算中的应用
   - 乘法公式：计算乘积事件的概率
   - 全概率公式：通过划分计算事件的概率
   - Bayes公式（逆概率公式）：基于概率的因果分析
3. 事件的独立性
   - 独立性的直观含义
   - 事件独立性的定义和性质
   - 应用：系统可靠性分析
   - 事件的相关系数
   - 独立试验

内容提要

1. 条件概率的定义
   - 相对频率
   - 条件概率
2. 条件概率在概率计算中的应用
   - 乘法公式：计算乘积事件的概率
   - 全概率公式：通过划分计算事件的概率
   - Bayes公式（逆概率公式）：基于概率的因果分析
3. 事件的独立性
   - 独立性的直观含义
   - 事件独立性的定义和性质
   - 应用：系统可靠性分析
   - 事件的相关系数
   - 独立试验

内容提要

1. 条件概率的定义
    - 相对频率
    - 条件概率
2. 条件概率在概率计算中的应用
    - 乘法公式：计算乘积事件的概率
    - 全概率公式：通过划分计算事件的概率
    - Bayes公式（逆概率公式）：基于概率的因果分析
3. 事件的独立性
    - 独立性的直观含义
    - 事件独立性的定义和性质
    - 应用：系统可靠性分析
    - 事件的相关系数
    - 独立试验

内容提要

1. 条件概率的定义
   - 相对频率
   - 条件概率
2. 条件概率在概率计算中的应用
   - 乘法公式：计算乘积事件的概率
   - 全概率公式：通过划分计算事件的概率
   - Bayes公式（逆概率公式）：基于概率的因果分析
3. 事件的独立性
   - 独立性的直观含义
   - 事件独立性的定义和性质
   - 应用：系统可靠性分析
   - 事件的相关系数
   - 独立试验

8:57:33

内容提要

1. 条件概率的定义
   - 相对频率
   - 条件概率
2. 条件概率在概率计算中的应用
   - 乘法公式：计算乘积事件的概率
   - 全概率公式：通过划分计算事件的概率
   - Bayes公式（逆概率公式）：基于概率的因果分析
3. 事件的独立性
   - 独立性的直观含义
   - 事件独立性的定义和性质
   - 应用：系统可靠性分析
   - 事件的相关系数
   - 独立试验

内容提要

1. 条件概率的定义
   - 相对频率
   - 条件概率
2. 条件概率在概率计算中的应用
   - 乘法公式：计算乘积事件的概率
   - 全概率公式：通过划分计算事件的概率
   - Bayes公式（逆概率公式）：基于概率的因果分析
3. 事件的独立性
   - 独立性的直观含义
   - 事件独立性的定义和性质
   - 应用：系统可靠性分析
   - 事件的相关系数
   - 独立试验

内容提要

1. 条件概率的定义
   - 相对频率
   - 条件概率
2. 条件概率在概率计算中的应用
   - 乘法公式：计算乘积事件的概率
   - 全概率公式：通过划分计算事件的概率
   - Bayes公式（逆概率公式）：基于概率的因果分析
3. 事件的独立性
   - 独立性的直观含义
   - 事件独立性的定义和性质
   - 应用：系统可靠性分析
   - 事件的相关系数
   - 独立试验

8:57:33

条件概率的定义

条件概率，相对频率

如果我们知道抛掷一颗骰子得到了双数点，那么得到6点的可能性有多大?

一般地，如果在一个随机试验后我们获知某个事件B发生了，那么事件A发生的可能性有多大?

“条件概率”：这在已知事件B发生的条件下，A发生的可能性大小，记为$\mathbb{P}(A|B)$。

条件概率，相对频率

如果我们知道抛掷一颗骰子得到了双数点，那么得到6点的可能性有多大？

一般地，如果在一个随机试验后我们获知某个事件B发生了，那么事件A发生的可能性有多大？

“条件概率”：这在已知事件B发生的条件下，A发生的可能性大小，记为$\mathbb{P}(A|B)$。

我们从重复试验和频率的角度来探讨$\mathbb{P}(A|B)$的合理赋值。

条件概率，相对频率

如果我们知道抛掷一颗骰子得到了双数点，那么得到6点的可能性有多大？

一般地，如果在一个随机试验后我们获知某个事件B发生了，那么事件A发生的可能性有多大？

“条件概率”：这在已知事件B发生的条件下，A发生的可能性大小，记为$\mathbb{P}(A|B)$。

我们从重复试验和频率的角度来探讨$\mathbb{P}(A|B)$的合理赋值。

将一个随机试验重复进行n次，事件B共发生了$N_n(B)$次，而在这$N_n(B)$次试验中A发生了$N_n(AB)$次，实际上$N_n(AB)$就是n次试验中A, B同时发生的次数。于是在B发生的情况下，A发生的**相对频率**为

$$\frac{N_n(AB)}{N_n(B)} = \frac{N_n(AB)/n}{N_n(B)/n}$$

条件概率，相对频率

如果我们知道抛掷一颗骰子得到了双数点，那么得到6点的可能性有多大？

一般地，如果在一个随机试验后我们获知某个事件B发生了，那么事件A发生的可能性有多大？

“条件概率”：这在已知事件B发生的条件下，A发生的可能性大小，记为$\mathbb{P}(A|B)$。

我们从重复试验和频率的角度来探讨$\mathbb{P}(A|B)$的合理赋值。

将一个随机试验重复进行n次，事件B共发生了$N_n(B)$次，而在这$N_n(B)$次试验中A发生了$N_n(AB)$次，实际上$N_n(AB)$就是n次试验中A, B同时发生的次数。于是在B发生的情况下，A发生的**相对频率**为

$$\frac{N_n(AB)}{N_n(B)} = \frac{N_n(AB)/n}{N_n(B)/n} \quad \text{``}\longrightarrow\text{''} \quad \frac{\mathbb{P}(AB)}{\mathbb{P}(B)}, \quad n \to \infty.$$

条件概率的定义

定义：条件概率

设一个随机试验的概率空间为$(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbb{P})$，$A, B \in \mathfrak{F}$，$\mathbb{P}(B) > 0$。则定义

$$\mathbb{P}(A|B) := \frac{\mathbb{P}(AB)}{\mathbb{P}(B)}$$

为在已知事件B发生的条件下，A发生的**条件概率**。

条件概率的定义

定义：条件概率

设一个随机试验的概率空间为$(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbb{P})$，$A, B \in \mathfrak{F}$，$\mathbb{P}(B) > 0$。则定义

$$\mathbb{P}(A|B) := \frac{\mathbb{P}(AB)}{\mathbb{P}(B)}$$

为在已知事件B发生的条件下，A发生的**条件概率**。

例

将一个骰子抛掷一次，A表示掷得双数点，B表示掷得大点，则

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(AB)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\frac{2}{6}}{\frac{3}{6}} = \frac{2}{3}.$$

$$\mathbb{P}(A|B) > \mathbb{P}(A)$$

（直观解释？）

条件概率的定义

定义：条件概率

设一个随机试验的概率空间为$(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbb{P})$，$A, B \in \mathfrak{F}$，$\mathbb{P}(B) > 0$。则定义

$$\mathbb{P}(A|B) := \frac{\mathbb{P}(AB)}{\mathbb{P}(B)}$$

为在已知事件B发生的条件下，A发生的**条件概率**。

定理：条件概率是概率

设$(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbb{P})$是概率空间，$B \in \mathfrak{F}$，$\mathbb{P}(B) > 0$。则

1. $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbb{P}(\cdot|B))$也是概率空间，

   $$\mathbb{P}_B(\cdot) = \mathbb{P}(\cdot|B) : \mathfrak{F} \to \mathbb{R}, \qquad A \mapsto \mathbb{P}(A|B).$$

   从而条件概率满足概率的所有性质。
2. 如果$\mathbb{P}(BC) > 0$，则$\mathbb{P}_B(A|C) = \mathbb{P}(A|BC)$。

乘法公式：乘积事件的概率

定理：乘法公式

设$(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbb{P})$是概率空间，$A, B \in \mathfrak{F}$，$\mathbb{P}(B) > 0$。则

$$\mathbb{P}(AB) = \mathbb{P}(B) \cdot \mathbb{P}(A|B).$$

一般地，如果$A_1, \ldots, A_n \in \mathfrak{F}$满足$\mathbb{P}(A_1 \cdots A_{n-1}) > 0$，则

$$\mathbb{P}(A_1 A_2 \cdots A_n) = \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(A_2|A_1)\mathbb{P}(A_3|A_1 A_2) \cdots \mathbb{P}(A_n|A_1 \cdots A_{n-1}).$$

证明：定义

$$\mathbb{P}(A_1 A_2 \cdots A_n) = \mathbb{P}(A_1 \cdots A_{n-1}) \cdot \mathbb{P}(A_n|A_1 \cdots A_{n-1}).$$

乘法公式：乘积事件的概率

定理：乘法公式

设$(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbb{P})$是概率空间，$A, B \in \mathfrak{F}$，$\mathbb{P}(B) > 0$。则

$$\mathbb{P}(AB) = \mathbb{P}(B) \cdot \mathbb{P}(A|B).$$

一般地，如果$A_1, \ldots, A_n \in \mathfrak{F}$满足$\mathbb{P}(A_1 \cdots A_{n-1}) > 0$，则

$$\mathbb{P}(A_1 A_2 \cdots A_n) = \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(A_2|A_1)\mathbb{P}(A_3|A_1 A_2) \cdots \mathbb{P}(A_n|A_1 \cdots A_{n-1}).$$

证明：定义+数学归纳法

$$\mathbb{P}(A_1 A_2 \cdots A_n) = \mathbb{P}(A_1 \cdots A_{n-1}) \cdot \mathbb{P}(A_n|A_1 \cdots A_{n-1}).$$

乘法公式：乘积事件的概率

定理：乘法公式

设$(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbb{P})$是概率空间，$A, B \in \mathfrak{F}$，$\mathbb{P}(B) > 0$。则

$$\mathbb{P}(AB) = \mathbb{P}(B) \cdot \mathbb{P}(A|B).$$

一般地，如果$A_1, \ldots, A_n \in \mathfrak{F}$满足$\mathbb{P}(A_1 \cdots A_{n-1}) > 0$，则

$$\mathbb{P}(A_1 A_2 \cdots A_n) = \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(A_2|A_1)\mathbb{P}(A_3|A_1 A_2) \cdots \mathbb{P}(A_n|A_1 \cdots A_{n-1}).$$

证明：定义+数学归纳法

$$\mathbb{P}(A_1 A_2 \cdots A_n) = \underbrace{\mathbb{P}(A_1 \cdots A_{n-1})}_{\mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(A_2|A_1) \cdots \mathbb{P}(A_{n-1}|A_1 \cdots A_{n-2})} \cdot \mathbb{P}(A_n|A_1 \cdots A_{n-1}).$$

乘法公式，例

例

一种设备的寿命X为随机变量，失效率函数为$\lambda(t)$，即

$$\lambda(t) = \lim_{\Delta t \to +0} \frac{\mathbb{P}(X \le t + \Delta t | X > t)}{\Delta t}.$$

求$\mathbb{P}(X > t)$，即设备在$(0, t]$时段正常工作的概率。

解：记$A_t = \text{Alive at time } t = \{X > t\} = \{\omega : X(\omega) > t\}$。$p(t) = \mathbb{P}(A_t)$。
则对任意$t, \Delta t > 0$，$A_{t+\Delta t} \subset A_t$。

$$p(t + \Delta t) = \mathbb{P}(A_{t+\Delta t})$$

例

一种设备的寿命X为随机变量，失效率函数为$\lambda(t)$，即

$$\lambda(t) = \lim_{\Delta t \to +0} \frac{\mathbb{P}(X \le t + \Delta t | X > t)}{\Delta t}.$$

求$\mathbb{P}(X > t)$，即设备在$(0, t]$时段正常工作的概率。

解：记A_t = Alive at time $t = \{X > t\} = \{\omega : X(\omega) > t\}$。$p(t) = \mathbb{P}(A_t)$。
则对任意$t, \Delta t > 0$，$A_{t+\Delta t} \subset A_t$。

$$p(t + \Delta t) = \mathbb{P}(A_{t+\Delta t}) = \mathbb{P}(A_t)\mathbb{P}(A_{t+\Delta t} | A_t)$$

例

一种设备的寿命X为随机变量，失效率函数为$\lambda(t)$，即

$$\lambda(t) = \lim_{\Delta t \to +0} \frac{\mathbb{P}(X \le t + \Delta t | X > t)}{\Delta t}.$$

求$\mathbb{P}(X > t)$，即设备在$(0, t]$时段正常工作的概率。

解：记A_t = Alive at time $t = \{X > t\} = \{\omega : X(\omega) > t\}$。$p(t) = \mathbb{P}(A_t)$。
则对任意$t, \Delta t > 0$，$A_{t+\Delta t} \subset A_t$。

$$p(t + \Delta t) = \mathbb{P}(A_{t+\Delta t}) = \mathbb{P}(A_t)\mathbb{P}(A_{t+\Delta t}|A_t) = p(t)\left[1 - \mathbb{P}(\overline{A_{t+\Delta t}}|A_t)\right],$$

例

一种设备的寿命X为随机变量，失效率函数为$\lambda(t)$，即

$$\lambda(t)=\lim_{\Delta t\to+0}\frac{\mathbb{P}(X\le t+\Delta t|X>t)}{\Delta t}.$$

求$\mathbb{P}(X>t)$，即设备在$(0,t]$时段正常工作的概率。

解：记$A_t=$ Alive at time $t=\{X>t\}=\{\omega:X(\omega)>t\}$。$p(t)=\mathbb{P}(A_t)$。
则对任意$t,\Delta t>0$，$A_{t+\Delta t}\subset A_t$。

$$p(t+\Delta t)=\mathbb{P}(A_{t+\Delta t})=\mathbb{P}(A_t)\mathbb{P}(A_{t+\Delta t}|A_t)=p(t)\left[1-\mathbb{P}(\overline{A_{t+\Delta t}}|A_t)\right],$$

$$p(t+\Delta t)=p(t)\left[1-\lambda(t)\Delta t+o(\Delta t)\right],\quad \Delta t\to 0.$$

例

一种设备的寿命X为随机变量，失效率函数为$\lambda(t)$，即

$$\lambda(t) = \lim_{\Delta t \to +0} \frac{\mathbb{P}(X \le t + \Delta t | X > t)}{\Delta t}.$$

求$\mathbb{P}(X > t)$，即设备在$(0, t]$时段正常工作的概率。

解：记A_t = Alive at time $t = \{X > t\} = \{\omega : X(\omega) > t\}$。$p(t) = \mathbb{P}(A_t)$。
则对任意$t, \Delta t > 0$，$A_{t+\Delta t} \subset A_t$。

$$p(t+\Delta t) = \mathbb{P}(A_{t+\Delta t}) = \mathbb{P}(A_t)\mathbb{P}(A_{t+\Delta t}|A_t) = p(t)\left[1 - \mathbb{P}(\overline{A_{t+\Delta t}}|A_t)\right],$$

$$p(t+\Delta t) = p(t)\left[1 - \lambda(t)\Delta t + o(\Delta t)\right], \quad \Delta t \to 0.$$

因此p满足一阶线性常微分方程

$$\frac{dp(t)}{dt} = -\lambda(t)p(t), \quad p(0) = 1.$$

乘法公式，例

例

一种设备的寿命X为随机变量，失效率函数为$\lambda(t)$，即

$$\lambda(t) = \lim_{\Delta t \to +0} \frac{\mathbb{P}(X \le t + \Delta t | X > t)}{\Delta t}.$$

求$\mathbb{P}(X > t)$，即设备在$(0, t]$时段正常工作的概率。

解：记A_t = Alive at time $t = \{X > t\} = \{\omega : X(\omega) > t\}$。$p(t) = \mathbb{P}(A_t)$。
则对任意$t, \Delta t > 0$，$A_{t+\Delta t} \subset A_t$。

$$p(t+\Delta t) = \mathbb{P}(A_{t+\Delta t}) = \mathbb{P}(A_t)\mathbb{P}(A_{t+\Delta t}|A_t) = p(t)\left[1 - \mathbb{P}(\overline{A_{t+\Delta t}}|A_t)\right],$$

$$p(t+\Delta t) = p(t)\left[1 - \lambda(t)\Delta t + o(\Delta t)\right], \quad \Delta t \to 0.$$

因此p满足一阶线性常微分方程

$$\frac{dp(t)}{dt} = -\lambda(t)p(t), \quad p(0) = 1. \Longrightarrow p(t) = \exp\left(-\int_0^t \lambda(s)ds\right).$$

乘法公式，例

如果失效率为常数$\lambda > 0$，则

$$p(t) = e^{-\lambda t},$$

于是设备在$(0, t]$时段内失效的概率为$1 - e^{-\lambda t}$，我们称产品寿命X服从**指数分布**$\mathrm{Exp}(\lambda)$。

全概率公式：通过划分计算事件的概率

定理：全概率公式

设$(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbb{P})$是概率空间，$B_1, \ldots, B_n, \ldots \in \mathfrak{F}$是$\Omega$的一个正划分：

$$B_i B_j = \emptyset, \quad \forall i \neq j; \qquad \Omega = \bigcup_{n\geq 1} B_n; \qquad \mathbb{P}(B_n) > 0, \quad \forall n.$$

则对任意$A \in \mathfrak{F}$，

$$\mathbb{P}(A) = \sum_n \mathbb{P}(B_n)\mathbb{P}(A|B_n).$$

证明：

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(\cup_{n\geq 1} AB_n) = \sum_{n\geq 1} \mathbb{P}(AB_n).$$

全概率公式：通过划分计算事件的概率

定理：全概率公式

设$(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbb{P})$是概率空间，$B_1, \ldots, B_n, \ldots \in \mathfrak{F}$是$\Omega$的一个正划分：

$$B_i B_j = \emptyset, \quad \forall i \neq j; \qquad \Omega = \bigcup_{n\geq 1} B_n; \qquad \mathbb{P}(B_n) > 0, \quad \forall n.$$

则对任意$A \in \mathfrak{F}$，

$$\mathbb{P}(A) = \sum_n \mathbb{P}(B_n)\mathbb{P}(A|B_n).$$

证明：

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(\cup_{n\geq 1} AB_n) = \sum_{n\geq 1} \underbrace{\mathbb{P}(AB_n)}_{\mathbb{P}(B_n)\mathbb{P}(A|B_n)} .$$

全概率公式，例：Pólya坛子模型

例

一个袋子中装有b个黑球与r个红球。每次从袋中随机地取出一个球，然后将其放回，同时再放入c个同色球。记R_k表示第k次取到红球。求$\mathbb{P}(R_1R_2)$，$\mathbb{P}(R_2)$，$\mathbb{P}(R_1|R_2)$。

全概率公式，例：Pólya坛子模型

例

一个袋子中装有b个黑球与r个红球。每次从袋中随机地取出一个球，然后将其放回，同时再放入c个同色球。记R_k表示第k次取到红球。求$\mathbb{P}(R_1R_2)$，$\mathbb{P}(R_2)$，$\mathbb{P}(R_1|R_2)$。

解：记$B_k = R_k^c$。于是

$$\mathbb{P}(R_1R_2) = \mathbb{P}(R_1)\cdot\mathbb{P}(R_2|R_1) = \frac{r}{b+r}\cdot\frac{r+c}{b+r+c}.$$

全概率公式，例：Pólya坛子模型

例

一个袋子中装有b个黑球与r个红球。每次从袋中随机地取出一个球，然后将其放回，同时再放入c个同色球。记R_k表示第k次取到红球。求$\mathbb{P}(R_1R_2)$，$\mathbb{P}(R_2)$，$\mathbb{P}(R_1|R_2)$。

解：记$B_k = R_k^c$。于是

$$\mathbb{P}(R_1R_2) = \mathbb{P}(R_1)\cdot\mathbb{P}(R_2|R_1) = \frac{r}{b+r}\cdot\frac{r+c}{b+r+c}.$$

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(R_2) &= \mathbb{P}(B_1)\mathbb{P}(R_2|B_1) + \mathbb{P}(R_1)\mathbb{P}(R_2|R_1)\\ &= \frac{b}{b+r}\cdot\frac{r}{b+r+c} + \frac{r}{b+r}\cdot\frac{r+c}{b+r+c}\\ &= \frac{r}{b+r}.\end{aligned}$$

全概率公式，例：Pólya坛子模型

例

一个袋子中装有b个黑球与r个红球。每次从袋中随机地取出一个球，然后将其放回，同时再放入c个同色球。记R_k表示第k次取到红球。求$\mathbb{P}(R_1R_2)$，$\mathbb{P}(R_2)$，$\mathbb{P}(R_1|R_2)$。

解：记$B_k = R_k^c$。于是

$$\mathbb{P}(R_1R_2) = \mathbb{P}(R_1)\cdot\mathbb{P}(R_2|R_1) = \frac{r}{b+r}\cdot\frac{r+c}{b+r+c}.$$

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(R_2) &= \mathbb{P}(B_1)\mathbb{P}(R_2|B_1) + \mathbb{P}(R_1)\mathbb{P}(R_2|R_1)\\ &= \frac{b}{b+r}\cdot\frac{r}{b+r+c} + \frac{r}{b+r}\cdot\frac{r+c}{b+r+c}\\ &= \frac{r}{b+r}.\end{aligned}$$

$$\mathbb{P}(R_1|R_2) = \frac{\mathbb{P}(R_1R_2)}{\mathbb{P}(R_2)} = \frac{r+c}{b+r+c}.$$

Pólya坛子模型的讨论

上述计算表明$\mathbb{P}(R_1) = \mathbb{P}(R_2)$。事实上，可以证明

$$\mathbb{P}(R_k) = \mathbb{P}(R_1) = \frac{r}{b+r}, \quad \forall k \geq 1.$$

结论：

Pólya坛子模型的讨论

上述计算表明$\mathbb{P}(R_1) = \mathbb{P}(R_2)$。事实上，可以证明

$$\mathbb{P}(R_k) = \mathbb{P}(R_1) = \frac{r}{b+r}, \quad \forall k \geq 1.$$

结论：抓阄是公平的。

还可证明

Pólya坛子模型的讨论

上述计算表明$\mathbb{P}(R_1) = \mathbb{P}(R_2)$。事实上，可以证明

$$\mathbb{P}(R_k) = \mathbb{P}(R_1) = \frac{r}{b+r}, \quad \forall k \geq 1.$$

结论：抓阄是公平的。

还可证明取球结果与顺序无关：

Pólya坛子模型的讨论

上述计算表明$\mathbb{P}(R_1)=\mathbb{P}(R_2)$。事实上，可以证明

$$\mathbb{P}(R_k)=\mathbb{P}(R_1)=\frac{r}{b+r},\quad \forall k\geq 1.$$

结论：抓阄是公平的。

还可证明取球结果与顺序无关：对任何$1\leq i_1<i_2<\cdots<i_k\leq n$,

$$\begin{aligned}&\mathbb{P}(\text{取}n\text{次球，在第}i_1,i_2,\ldots,i_k\text{次取得红球，其他次取得黑球})\\&\qquad=\mathbb{P}(R_1\cdots R_kB_{k+1}\cdots B_n).\end{aligned}$$

上述计算表明$\mathbb{P}(R_1)=\mathbb{P}(R_2)$。事实上，可以证明

$$\mathbb{P}(R_k)=\mathbb{P}(R_1)=\frac{r}{b+r},\quad \forall k\geq 1.$$

结论：抓阄是公平的。

还可证明取球结果与顺序无关：对任何$1\leq i_1<i_2<\cdots<i_k\leq n$，

$$\mathbb{P}(\text{取}n\text{次球，在第}i_1,i_2,\ldots,i_k\text{次取得红球，其他次取得黑球}) \\ =\mathbb{P}(R_1\cdots R_kB_{k+1}\cdots B_n).$$

对任意$i<j$，

$$\mathbb{P}(R_i|R_j)=\mathbb{P}(R_j|R_i)=\frac{r+c}{b+r+c}.$$

并且

$$\mathbb{P}(R_i|R_j)\geq\mathbb{P}(R_i),$$

等号当且仅当$b=0$或$c=0$。（直观解释）

全概率公式，例：赌徒输光与随机徘徊

例

甲乙二人赌钱，各有赌资i元、$a-i$元。每赌一次必须分出胜负，胜方从负方的赌资中赢得1元，到有人输光时结束。已知每次赌，甲胜的概率为$0<p<1$，乙胜的概率为$q=1-p$。求甲最终破产的概率。

例

甲乙二人赌钱，各有赌资i元、$a-i$元。每赌一次必须分出胜负，胜方从负方的赌资中赢得1元，到有人输光时结束。已知每次赌，甲胜的概率为$0<p<1$，乙胜的概率为$q=1-p$。求甲最终破产的概率。

解：$A_i=$甲有赌资i元但最终破产，$p_i=\mathbb{P}(A_i)$。首步分析法：考虑样本空间的划分$B=$甲胜首局、$B^c=$乙胜首局，由全概率公式，
当$1\le i<a+b$时，

$$\mathbb{P}(A_i)=\mathbb{P}(B)\mathbb{P}(A_i|B)+\mathbb{P}(B^c)\mathbb{P}(A_i|B^c)=p\mathbb{P}(A_{i+1})+q\mathbb{P}(A_{i-1}),$$

这样我们建立了关于数列$\{p_i\}$的一个二阶常系数线性差分方程

$$p_i=pp_{i+1}+qp_{i-1}, \tag{0.1}$$

将$p_i=z^i$代入得到特征方程

$$pz^2-z+q=0$$

例

甲乙二人赌钱，各有赌资i元、$a-i$元。每赌一次必须分出胜负，胜方从负方的赌资中赢得1元，到有人输光时结束。已知每次赌，甲胜的概率为$0<p<1$，乙胜的概率为$q=1-p$。求甲最终破产的概率。

解：$A_i=$甲有赌资i元但最终破产，$p_i=\mathbb{P}(A_i)$。首步分析法：考虑样本空间的划分$B=$甲胜首局、$B^c=$乙胜首局，由全概率公式，当$1\le i<a+b$时，

$$\mathbb{P}(A_i)=\mathbb{P}(B)\mathbb{P}(A_i|B)+\mathbb{P}(B^c)\mathbb{P}(A_i|B^c)=p\mathbb{P}(A_{i+1})+q\mathbb{P}(A_{i-1}),$$

这样我们建立了关于数列$\{p_i\}$的一个二阶常系数线性差分方程

$$p_i=pp_{i+1}+qp_{i-1}, \tag{0.1}$$

将$p_i=z^i$代入得到特征方程

$$pz^2-z+q=0 \quad\Longrightarrow\quad z=1, \qquad \text{或} \qquad z=\frac{q}{p}.$$

全概率公式，例：赌徒输光与随机徘徊

当$p \neq q$时，上述差分方程的通解为

$$p_i = A \cdot 1^i + B \left(\frac{q}{p}\right)^i,$$

对边值条件$p_0 = 1, p_a = 0$可解得

$$A = 1 - B, \qquad B = 1/\left(1 - \left(\frac{q}{p}\right)^a\right).$$

当$p = q = 1/2$时，$z = 1$是特征方程的二重根，这时差分方程的通解是

$$p_i = (A + Bi) \times 1^i,$$

对边值条件$p_0 = 1, p_a = 0$可解得$A = 1$，$B = -\frac{1}{a}$。

全概率公式，例：赌徒输光与随机徘徊

从而

$$p_i = \begin{cases} 1 - \frac{1-(q/p)^i}{1-(q/p)^a}, & 若 p \neq 1/2; \\ \\ 1 - \frac{i}{a}, & 若 p = 1/2. \end{cases}$$

不难发现：

1. 当a有限时，最终甲输光或乙输光的概率为1，也就是赌博几乎注定（以概率1）要在有限时间内结束。
2. 当$a \to \infty$时（乙具有无限财富，比如赌场），甲最终输光的概率为

$$\mathbb{P}(A_i) = \begin{cases} (q/p)^i, & 若 p > q; \\ 1, & 若 p \leq q. \end{cases}$$

定理：Bayes公式

设$(\Omega,\mathfrak{F},\mathbb{P})$是概率空间，$B_1,\ldots,B_n,\ldots\in\mathfrak{F}$是$\Omega$的一个正划分：

$$B_iB_j=\emptyset,\quad \forall i\neq j;\qquad \Omega=\bigcup_{n\geq 1}B_n;\qquad \mathbb{P}(B_n)>0,\quad \forall n.$$

设$A\in\mathfrak{F}$满足$\mathbb{P}(A)>0$。则

$$\mathbb{P}(B_k|A)=\frac{\mathbb{P}(B_k)\mathbb{P}(A|B_k)}{\sum_n\mathbb{P}(B_n)\mathbb{P}(A|B_n)}.$$

注记

B_k为“因”，A为“果”；Bayes：据“果”探“因”。
$\mathbb{P}(B_k)$先验概率，$\mathbb{P}(B_k|A)$后验概率。Bayes：经验修正

定理：Bayes公式

设$(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbb{P})$是概率空间，$B_1, \ldots, B_n, \ldots \in \mathfrak{F}$是$\Omega$的一个正划分：

$$B_i B_j = \emptyset, \quad \forall i \neq j; \qquad \Omega = \bigcup_{n \geq 1} B_n; \qquad \mathbb{P}(B_n) > 0, \quad \forall n.$$

设$A \in \mathfrak{F}$满足$\mathbb{P}(A) > 0$。则

$$\mathbb{P}(B_k|A) = \frac{\mathbb{P}(B_k)\mathbb{P}(A|B_k)}{\sum_n \mathbb{P}(B_n)\mathbb{P}(A|B_n)}.$$

证明：条件概率定义

$$\mathbb{P}(B_k|A) = \frac{\mathbb{P}(AB_k)}{\mathbb{P}(A)}$$

定理：Bayes公式

设$(\Omega,\mathfrak{F},\mathbb{P})$是概率空间，$B_1,\ldots,B_n,\ldots\in\mathfrak{F}$是$\Omega$的一个正划分：

$$B_iB_j=\emptyset,\quad \forall i\neq j;\qquad \Omega=\bigcup_{n\geq 1}B_n;\qquad \mathbb{P}(B_n)>0,\quad \forall n.$$

设$A\in\mathfrak{F}$满足$\mathbb{P}(A)>0$。则

$$\mathbb{P}(B_k|A)=\frac{\mathbb{P}(B_k)\mathbb{P}(A|B_k)}{\sum_n\mathbb{P}(B_n)\mathbb{P}(A|B_n)}.$$

证明：条件概率定义+全概率公式+乘法公式

$$\mathbb{P}(B_k|A)=\frac{\mathbb{P}(AB_k)}{\mathbb{P}(A)}=\frac{\mathbb{P}(B_k)\mathbb{P}(A|B_k)}{\sum_n\mathbb{P}(B_n)\mathbb{P}(A|B_n)}.$$

Bayes公式，例：Monty Hall，汽车？山羊？

例

猜奖游戏，三扇门，其中一扇门后有汽车，另外两扇门里藏着山羊。观众先猜一扇门，主持人先打开其余两扇门中的一扇，你看到了山羊。这时观众改不改主意？

Bayes公式，例：Monty Hall，汽车？山羊？

例

猜奖游戏，三扇门，其中一扇门后有汽车，另外两扇门里藏着山羊。观众先猜一扇门，主持人先打开其余两扇门中的一扇，你看到了山羊。这时观众改不改主意？

解：你看到了打开的门里站着只山羊，于是汽车就在剩下两扇门中的某一扇后面，各有$1/2$可能，于是改不改主意无所谓。

Bayes公式，例：Monty Hall，汽车？山羊？

例

猜奖游戏，三扇门，其中一扇门后有汽车，另外两扇门里藏着山羊。观众先猜一扇门，主持人先打开其余两扇门中的一扇，你看到了山羊。这时观众改不改主意？

解：你看到了打开的门里站着只山羊，于是汽车就在剩下两扇门中的某一扇后面，各有$1/2$可能，于是改不改主意无所谓。

其实不然！因为你忽视了主持人的身份，他是知道那扇门里有汽车的。

Bayes公式，例：Monty Hall，汽车？山羊？

例

猜奖游戏，三扇门，其中一扇门后有汽车，另外两扇门里藏着山羊。观众先猜一扇门，主持人先打开其余两扇门中的一扇，你看到了山羊。这时观众改不改主意？

解：设观众先猜的那扇是1号门。其余两扇门分别是2号门和3号门。
记A_i表示汽车在i号门后，B_i表示主持人开i号门。A_1, A_2, A_3构成样本空间的划分，

$$\mathbb{P}(A_i) = \frac{1}{3}, \quad i = 1, 2, 3; \quad \mathbb{P}(B_2|A_1) = \frac{1}{2}, \quad \mathbb{P}(B_2|A_2) = 0, \quad \mathbb{P}(B_2|A_3) = 1,$$

$$\mathbb{P}(A_1|B_2) = \frac{\mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(B_2|A_1)}{\sum_{i=1}^{3} \mathbb{P}(A_i)\mathbb{P}(B_2|A_i)} = \frac{\frac{1}{3} \times \frac{1}{2}}{\frac{1}{3} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \times 0 + \frac{1}{3} \times 1} = \frac{1}{3},$$

$$\mathbb{P}(A_3|B_2) = 1 - \mathbb{P}(A_1|B_2) - \mathbb{P}(A_2|B_2) = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}.$$

改变初衷会有更大获胜机会！

Bayes公式，例：Monty Hall，汽车？山羊？

例

猜奖游戏，三扇门，其中一扇门后有汽车，另外两扇门里藏着山羊。观众先猜一扇门，主持人先打开其余两扇门中的一扇，你看到了山羊。这时观众改不改主意？

解：设观众先猜的那扇是1号门。其余两扇门分别是2号门和3号门。
记A_i表示汽车在i号门后，B_i表示主持人开i号门。A_1, A_2, A_3构成样本空间的划分，

$$\mathbb{P}(A_i) = \frac{1}{3}, \quad i = 1, 2, 3; \quad \mathbb{P}(B_2|A_1) = \frac{1}{2}, \quad \mathbb{P}(B_2|A_2) = 0, \quad \mathbb{P}(B_2|A_3) = 1,$$

$$\mathbb{P}(A_1|B_2) = \frac{\mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(B_2|A_1)}{\sum_{i=1}^{3}\mathbb{P}(A_i)\mathbb{P}(B_2|A_i)} = \frac{\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}}{\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\times 0+\frac{1}{3}\times 1} = \frac{1}{3},$$

$$\mathbb{P}(A_3|B_2) = 1 - \mathbb{P}(A_1|B_2) - \mathbb{P}(A_2|B_2) = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}.$$

改变初衷会有更大获胜机会！知识改善机遇！

事件的独立性

事件的独立性，直观含义

设$(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbb{P})$是概率空间。称两个事件$A, B \in \mathfrak{F}$是独立的，是指它们在概率的意义上相互不影响。

事件的独立性，直观含义

设$(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbb{P})$是概率空间。称两个事件$A, B \in \mathfrak{F}$是独立的，是指它们在概率的意义上相互不影响。

B发生与否不改变我们对A发生的可能性大小的判断：

$$\mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A|B^c) = \mathbb{P}(A),$$

而且，A发生与否不改变我们对B发生的可能性大小的判断：

$$\mathbb{P}(B|A) = \mathbb{P}(B|A^c) = \mathbb{P}(B).$$

事件的独立性，直观含义

设$(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbb{P})$是概率空间。称两个事件$A, B \in \mathfrak{F}$是独立的，是指它们在概率的意义上相互不影响。

B发生与否不改变我们对A发生的可能性大小的判断：

$$\mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A|B^c) = \mathbb{P}(A),$$

而且，A发生与否不改变我们对B发生的可能性大小的判断：

$$\mathbb{P}(B|A) = \mathbb{P}(B|A^c) = \mathbb{P}(B).$$

由于

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B)\mathbb{P}(A|B) + \mathbb{P}(B^c)\mathbb{P}(A|B^c),$$

所以当$0 < \mathbb{P}(B) < 1$时，第一组等式中任何两个量相等都意味着三个量相等。而当$\mathbb{P}(B) > 0$时，$\mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A)$等价于$\mathbb{P}(AB) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$。所以当$0 < \mathbb{P}(A), \mathbb{P}(B) < 1$时，上述两组等式都等价于

$$\mathbb{P}(AB) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B).$$

事件的独立性，数学含义

定义

设$(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbb{P})$是概率空间。称两个事件$A, B \in \mathfrak{F}$是**独立的**，如果它们满足

$$\mathbb{P}(AB) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B).$$

定义

设$(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbb{P})$是概率空间。称两个事件$A, B \in \mathfrak{F}$是**独立的**，如果它们满足

$$\mathbb{P}(AB) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B).$$

例

掷一颗均匀骰子。A_i表示得到的点数是i的倍数。则A_2, A_3是独立的。

证明：$\mathbb{P}(A_2) = \frac{1}{2}$，$\mathbb{P}(A_3) = \frac{1}{3}$，$\mathbb{P}(A_2A_3) = \mathbb{P}(A_6) = \frac{1}{6}$。

例

在Pólya坛子模型中，如果$b, r > 0$，则R_1, R_2独立当且仅当$c = 0$。

事件的独立性，数学含义

定义

设$(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbb{P})$是概率空间。称两个事件$A, B \in \mathfrak{F}$是**独立的**，如果它们满足

$$\mathbb{P}(AB) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B).$$

命题

A, B独立 $\Longrightarrow$ A, B^c独立。

证明：

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(AB^c) - \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B^c) &= \left[\mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(AB)\right] - \mathbb{P}(A)\left[1 - \mathbb{P}(B)\right] \\ &= \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(AB). \end{aligned}$$

命题

$\mathbb{P}(A) = 0 \Longrightarrow$ A与任何事件B独立。　特别地，$\emptyset$与任何事件B独立。
$\mathbb{P}(A) = 1 \Longrightarrow$ A与任何事件B独立。　特别地，Ω与任何事件B独立。

事件的独立性，数学含义

定义

设$(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbb{P})$是概率空间。称两个事件$A, B \in \mathfrak{F}$是**独立的**，如果它们满足

$$\mathbb{P}(AB) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B).$$

总结以上结论，

命题

A, B独立 $\Longleftrightarrow \forall C \in \mathfrak{F}_A := \{\Omega, \emptyset, A, A^c\}$与$\forall D \in \mathfrak{F}_B := \{\Omega, \emptyset, B, B^c\}$独立。

多个事件的独立性

我们说三个事件A, B, C是独立的，是指它们中任何一些事件无论如何发生都不改变其他事件发生的可能性的大小。即

A与$\mathfrak{F}_{B,C}$中任一事件独立，其中

$$\mathfrak{F}_{B,C} = \{\Omega, \emptyset, B, C, B^c, C^c, BC, BC^c, B^cC, B^cC^c, B\cup C, B\cup C^c, B^c\cup C, B^c\cup C^c, B\Delta C, B\Delta C^c, \}.$$

同样，B与$\mathfrak{F}_{A,C}$中任一事件独立，C与$\mathfrak{F}_{A,B}$中任一事件独立。

如果三个事件独立，那么它们必然两两独立。但是下面的例子表明，两两独立不足以保证三个事件独立。

例

$\Omega = \{1, 2, 3, 4\}$上的古典概型，$A = \{1, 4\}$，$B = \{2, 4\}$，$C = \{3, 4\}$，它们两两独立，但是如果B, C同时发生，则A必然发生，所以A, BC不独立。

多个事件的独立性

我们说三个事件A, B, C是独立的，是指它们中任何一些事件无论如何发生都不改变其他事件发生的可能性的大小。即

A与$\mathfrak{F}_{B,C}$中任一事件独立，其中

$$\mathfrak{F}_{B,C} = \{\Omega, \emptyset, B, C, B^c, C^c, BC, BC^c, B^cC, B^cC^c, \\ B\cup C, B\cup C^c, B^c\cup C, B^c\cup C^c, B\Delta C, B\Delta C^c, \}.$$

同样，B与$\mathfrak{F}_{A,C}$中任一事件独立，C与$\mathfrak{F}_{A,B}$中任一事件独立。

如果三个事件独立，那么它们必然两两独立。但是下面的例子表明，两两独立不足以保证三个事件独立。

例

$\Omega = \{1, 2, 3, 4\}$上的古典概型，$A = \{1, 4\}$，$B = \{2, 4\}$，$C = \{3, 4\}$，它们两两独立，但是如果B, C同时发生，则A必然发生，所以A, BC不独立。

?

那么在两两独立的基础上，如何补充尽可能少的条件就可以保证三个事件的独立性呢?

多个事件的独立性

定义

设$(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbb{P})$是概率空间。称事件$A_1, A_2, A_3 \in \mathfrak{F}$是**独立的**，如果它们满足

$$\mathbb{P}(A_i A_j) = \mathbb{P}(A_i)\mathbb{P}(A_j), \quad 1 \leq i < j \leq 3.$$

（即两两独立），并且

$$\mathbb{P}(A_1 A_2 A_3) = \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(A_2)\mathbb{P}(A_3).$$

多个事件的独立性

命题

A, B, C独立 $\Longrightarrow A, \forall D \in \mathfrak{F}_{B,C}$独立。

多个事件的独立性

命题

A, B, C独立 $\Longrightarrow A, \forall D \in \mathfrak{F}_{B,C}$独立。

引理1

$D_1, \ldots, D_n$互不相容，A与每个D_i独立$\Longrightarrow A$与$D_1 \cup \cdots \cup D_n$独立。

多个事件的独立性

命题

A,B,C独立 $\Longrightarrow A, \forall D\in \mathfrak{F}_{B,C}$独立。

引理1

$D_1,\dots,D_n$互不相容，A与每个D_i独立$\Longrightarrow A$与$D_1\cup\cdots\cup D_n$独立。

证明：

$$\mathbb{P}\left(A\cdot\bigcup_i D_i\right)=\mathbb{P}\left(\bigcup_i AD_i\right)=\sum_i \mathbb{P}(AD_i)$$

$$=\sum_i \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(D_i)=\mathbb{P}(A)\mathbb{P}\left(\bigcup_i D_i\right).$$

多个事件的独立性

命题

A, B, C独立 $\Longrightarrow A, \forall D \in \mathfrak{F}_{B,C}$独立。

引理1

$D_1, \ldots, D_n$互不相容， A与每个D_i独立$\Longrightarrow A$与$D_1 \cup \cdots \cup D_n$独立。

引理2

A, B, C独立 $\Longrightarrow A, B, C^c$独立。

多个事件的独立性

命题

A, B, C独立 $\Longrightarrow A, \forall D \in \mathfrak{F}_{B,C}$独立。

引理1

$D_1, \ldots, D_n$互不相容， A与每个D_i独立$\Longrightarrow A$与$D_1 \cup \cdots \cup D_n$独立。

引理2

A, B, C独立 $\Longrightarrow A, B, C^c$独立。

证明：

$$\mathbb{P}(ABC^c) = \mathbb{P}(AB) - \mathbb{P}(ABC) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)\mathbb{P}(C) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)\mathbb{P}(C^c).$$

多个事件的独立性

命题

A, B, C独立 $\Longrightarrow A, \forall D \in \mathfrak{F}_{B,C}$独立。

引理1

$D_1, \ldots, D_n$互不相容， A与每个D_i独立$\Longrightarrow A$与$D_1 \cup \cdots \cup D_n$独立。

引理2

A, B, C独立 $\Longrightarrow A, B, C^c$独立。

引理3

A, B, C独立 $\Longrightarrow A, BC$独立。

多个事件的独立性

命题

A,B,C独立 $\Longrightarrow A, \forall D \in \mathfrak{F}_{B,C}$独立。

引理1

$D_1,\ldots,D_n$互不相容，A与每个D_i独立$\Longrightarrow A$与$D_1\cup\cdots\cup D_n$独立。

引理2

A,B,C独立 $\Longrightarrow A,B,C^c$独立。

引理3

A,B,C独立 $\Longrightarrow A,BC$独立。

命题的证明：

引理2+引理3$\Longrightarrow A$与BC, BC^c, B^cC, B^cC^c中任何一个事件是独立的。

$\mathfrak{F}_{B,C}$中的任何一个事件可以表示为BC, BC^c, B^cC, B^cC^c中某些事件的和事件，

所以由引理1知，A与$\mathfrak{F}_{B,C}$中的任何一个事件独立。证毕。

多个事件的独立性

定义

设$(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbb{P})$是概率空间。称事件$A_1, A_2, \ldots, A_n \in \mathfrak{F}$是**独立的**，如果它们满足

$$\mathbb{P}(A_{i_1} \cdots A_{i_k}) = \mathbb{P}(A_{i_1}) \cdots \mathbb{P}(A_{i_k}), \quad 1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n, \quad \forall 2 \leq k \leq n.$$

定义

称事件组$\{A_\alpha\} \subset \mathfrak{F}$中的事件是**独立的**，如果它们中任意有限个事件是独立的。

定义

称一族事件组$\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_n$是**独立的**，如果从每个事件组中任取一个事件得到的事件组是独立的，即对任意$A_i \in \mathfrak{A}_i$，$A_1, \ldots, A_n$独立。

多个事件的独立性

定义

设$(\Omega,\mathfrak{F},\mathbb{P})$是概率空间。称事件$A_1,A_2,\ldots,A_n\in\mathfrak{F}$是**独立的**，如果它们满足

$$\mathbb{P}(A_{i_1}\cdots A_{i_k})=\mathbb{P}(A_{i_1})\cdots\mathbb{P}(A_{i_k}),\quad 1\le i_1<\cdots<i_k\le n,\quad \forall 2\le k\le n.$$

定义

称事件组$\{A_\alpha\}\subset\mathfrak{F}$中的事件是**独立的**，如果它们中任意有限个事件是独立的。

定义

称一族事件组$\mathfrak{A}_1,\ldots,\mathfrak{A}_n$是**独立的**，如果从每个事件组中任取一个事件得到的事件组是独立的，即对任意$A_i\in\mathfrak{A}_i$，$A_1,\ldots,A_n$独立。

定理

如果$A_1,A_2,\ldots,A_n$独立，并且将$A_1,\ldots,A_n$任意划分成小组$\mathfrak{A}_1,\ldots,\mathfrak{A}_k$，则事件域$\mathfrak{F}(\mathfrak{A}_1),\ldots,\mathfrak{F}(\mathfrak{A}_k)$独立。

应用：系统可靠性分析

串联系统

一个大系统由n个子系统组成，大系统正常运行需要所有子系统同时正常运行。设A_k表示第k个子系统正常运行，$p_k = \mathbb{P}(A_k)$，$k = 1, \ldots, n$。则大系统运行正常就是事件

$$A_1 \cdots A_n.$$

假设各子系统独立运行。于是大系统正常运行的概率为

$$\mathbb{P}(A_1 \cdots A_n) = \mathbb{P}(A_1) \cdots \mathbb{P}(A_n) = p_1 \cdots p_n.$$

应用：系统可靠性分析

并联系统

一个大系统由n个子系统组成，只要有子系统同时正常运行，大系统就正常运行。设A_k表示第k个子系统正常运行，$p_k = \mathbb{P}(A_k)$，$k = 1, \ldots, n$。则大系统运行正常就是事件

$$A_1 \cup \cdots \cup A_n.$$

假设各子系统独立运行。于是大系统正常运行的概率为

$$\mathbb{P}(A_1 \cup \cdots \cup A_n) = 1 - \mathbb{P}(A_1^c \cdots A_n^c) = 1 - \prod_{i=1}^{n}(1 - p_i).$$

应用：系统可靠性分析

串并联复合系统

一个大系统由若干个基层子系统经过各级串联或并联结构组成。

应用：系统可靠性分析

具有桥式结构的系统

桥

事件的相关系数

$$A, B\text{独立} \iff \mathbb{P}(AB) - \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) = 0.$$

我们希望用

$$\mathbb{P}(AB) - \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$$

的大小刻画A, B接近独立的程度。

事件的相关系数

$$A, B\text{独立} \iff \mathbb{P}(AB) - \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) = 0.$$

我们希望用

$$\mathbb{P}(AB) - \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$$

的大小刻画A, B接近独立的程度。

当$0 < \mathbb{P}(A) \ll 1$时，虽然

$$\mathbb{P}(AB) - \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) \approx 0,$$

但A, B仍有可能远离独立，比如$A = B$。

事件的相关系数

$$A, B\text{独立} \iff \mathbb{P}(AB) - \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) = 0.$$

我们希望用

$$\mathbb{P}(AB) - \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$$

的大小刻画A, B接近独立的程度。

当$0 < \mathbb{P}(A) \ll 1$时，虽然

$$\mathbb{P}(AB) - \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) \approx 0,$$

但A, B仍有可能远离独立，比如$A = B$。

当$\mathbb{P}(A) \approx 1$时，

$$\mathbb{P}(AB) - \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A^c)\mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A^cB) \approx 0,$$

但A, B仍有可能远离独立，比如$A^c = B$。

事件的相关系数

$$A, B\text{独立} \iff \mathbb{P}(AB) - \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) = 0.$$

我们希望用

$$\mathbb{P}(AB) - \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$$

的大小刻画A, B接近独立的程度。

当$0 < \mathbb{P}(A) \ll 1$时，虽然

$$\mathbb{P}(AB) - \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) \approx 0,$$

但A, B仍有可能远离独立，比如$A = B$。

当$\mathbb{P}(A) \approx 1$时，

$$\mathbb{P}(AB) - \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A^c)\mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A^cB) \approx 0,$$

但A, B仍有可能远离独立，比如$A^c = B$。

类比 向量的线性相关与垂直

事件的相关系数

定义：事件A, B的相关系数

$$r_{A,B} = \frac{\mathbb{P}(AB) - \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)}{\sqrt{\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(A^c)\mathbb{P}(B)\mathbb{P}(B^c)}}.$$

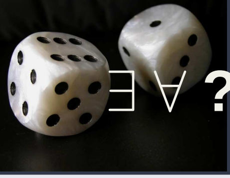
命题

设$0 < \mathbb{P}(A), \mathbb{P}(B) < 1$。则

1. $-1 \leq r_{A,B} \leq 1$。
2. $r_{A,B} = -r_{A,B^c}$。
3. A, B独立$\Longleftrightarrow r_{A,B} = 0$。
4. $r_{A,A} = 1$，$r_{A,A^c} = 1$。$r_{A,B} = 1 \Longleftrightarrow ?$，$r_{A,B} = -1 \Longleftrightarrow ?$
5. $r_{A,B} > 0 \Longleftrightarrow \mathbb{P}(A|B) > \mathbb{P}(A) > \mathbb{P}(A|B^c)$。

8:57:33

$\exists$ $\forall$?’s



∃ ∀ ?'s ?