《概率论》期末考试试卷

2003 年 6 月 17 日，半开卷，每题 10 分

1. 设 X 是连续型随机变量，密度函数 $p(x) = (1/2)e^{-|x|}, -\infty < x < \infty$. 试求其母函数，并由此推算 EX^n. (n 为任意自然数.)

2. 假设随机向量 (ξ, η) 在单位圆盘上均匀分布，试求在 $\eta = y$ 条件下 ξ 的分布密度函数 $p(x|y)$ 和条件数学期望 $E(\xi|\eta = y)$.

3. 假设随机变量序列 $\{\xi_n\}$ 依分布收敛于 ξ, $\{\eta_n\}$ 依分布收敛于常数 C, 证明随机变量序列 $\{\xi_n\eta_n\}$ 依分布收敛于 $C\xi$. 如果 η_n 依分布收敛但极限不是常数，结论仍成立么？

4. 奥地利神甫 Mendel 有关豌豆的试验被认为是现代遗传学的开篇之作. 他在一次试验中得到了 8023 颗杂交种子，其中 2001 颗是绿色的. 根据他的理论，其中四分之一应是绿色的. 如果今天有人重复这项试验，也产生 8023 颗杂交种子，结果更好 (即误差更小) 的概率是多大？你觉得 Mendel 有可能作假吗？

附：常用正态分布表. $\Phi(0.05) = 0.5199$, $\Phi(0.10) = 0.5398$, $\Phi(0.15) = 0.5596$, $\Phi(0.20) = 0.5793$, $\Phi(0.25) = 0.5987$, $\Phi(0.30) = 0.6179$, $\Phi(0.35) = 0.6368$, $\Phi(0.40) = 0.6554$, $\Phi(0.45) = 0.6736$.

5. 假设 $\xi = (\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n)$ 服从多元正态分布，均值为 $\mathbf{a}$, 协方差阵为 $\mathbf{B}$, 试求其特征函数 $f(\mathbf{t}) = E\exp(i\sum_{k=1}^n t_k\xi_k)$, 其中 $\mathbf{t} = (t_1, t_2, \cdots, t_n)$.

6. 叙述关于独立同分布随机变量序列的强大数定律的一般形式，并在增强假设的情况下予以证明.

7. 证明有限图上的简单随机游动是常返的.

8. 考虑直线上 (非时齐) 随机游动 $\{S_n\}$, $S_n = X_1 + X_2 + \cdots X_n$, $\{X_i\}$ 相互独立但不同分布. 当 n 为奇数时， $P(X_n = 1) = p$, $P(X_n = -1) = 1 - p$; 当 n 为偶数时， $P(X_n = 1) = 1 - p$, $P(X_n = -1) = p$. 试问随机游动 $\{S_n\}$ 是常返还是非常返的？证明你的结论.

9. 假定波音 747 飞机可载客 450 人，每张机票售价 1000 元. 在满员之前，多一位乘客就多 1000 元收入. 根据经验，已购机票的乘客中会有 10% 的人因各种原因临时改变行程. 因此航空公司实际售票数往往要多于飞机座位数. 而一旦要求登机的乘客超过座位时，航空公司提供 1000 元作为交换使得一些旅客同意改乘其他航班. 请问航空公司应预售多少张机票为最佳？

10. 过去乒乓球赛采用五局三胜制，先胜三局者为赢；每局 21 分，先得 21 分而对方得分不超过 19 为赢，如果打成 20 平，则须连得两分，如 24:22. 如今球赛规则变为七局四胜制，每局 11 分，据说是为了缩短赛时. 倘若两位选手水平相当，每次得分机会相等. 平均而言，新赛制与旧赛制相比可缩短比赛时间百分之多少？