应用随机过程期末考试试题

任课教师：林元烈

考试时间：2007 年 1 月 16 日 14:30-17:00

整理：李智超（Superplum）

1、X_1, X_2是离散型随机变量，且有$P(X_1=1, X_2=1)=2/16$，$P(X_1=1, X_2=2)=5/16$，$P(X_1=2, X_2=1)=3/16$，$P(X_2=2, X_2=2)=6/16$。$X_{(1)}, X_{(2)}$是X_1, X_2的顺序统计量，即$X_{(1)}=X_1 \wedge X_2$，$X_{(2)}=X_1 \vee X_2$。

（1）求$E(X_2 \mid X_1=i)$，$i \in \{1,2\}$，求$E(X_2 \mid X_1)$的示性函数表达式。

（2）求$\operatorname{cov}(X_1, X_2)$，$X_1, X_2$是否独立？说明理由。

（3）求$E(X_{(2)} \mid X_2)$的示性函数表达式。

2、$\{B(t), t \geq 0\}$是标准布朗运动。$X_n=\sum_{k=1}^{2^n} B^2\left(\frac{k-1}{2^n}t\right)\left(B\left(\frac{k}{2^n}t\right)-B\left(\frac{k-1}{2^n}t\right)\right)$，$Y_n=\exp\left(\lambda B(n)-\frac{n}{2}\lambda^2\right)$。

（1）$\{Y_n, n \geq 0\}$是否是鞅，说明理由。

（2）已知$E(B^4(t))=3t^2$，求$\lim_{n\to\infty} X_n \overset{m.s.}{=} ?$，求$\lim_{n\to\infty} E((X_n)^2)=?$

3、$\{N(t), t \geq 0\}$是参数为λ 的齐时泊松过程，$S_1, S_2, \cdots, S_n, \cdots$为事件相继发生的时刻。$N(t)$为[0,t]时间内事件发生的数目。

（1）求S_1, S_2-t在$N(t)=1$的条件下的联合概率密度函数，S_1, S_2-t是否关于$N(t)=1$条件独立，是否同分布，说明理由。

（2）求$E((S_1-ES_1)(S_2-ES_2) \mid N(t)=1)$。

4、$\{X(t), t \geq 0\}$是二阶矩过程，且满足方程$dX(t)=-\mu X(t)dt+\sigma dB(t)$，其中$\{B(t), t \geq 0\}$是标准布朗运动，μ 和σ 都是常数。

（1）求$X(t)$的表达式，并通过此式说明$X(t)$是否为马尔可夫正态过程。

（2）令 $X_n \overset{\Delta}{=} X(n)$，$\varepsilon_n \overset{\Delta}{=} \int_{n-1}^{n} e^{-\mu(n-s)} dB(s)$，问 $\{\varepsilon_n, n \in Z\}$ 是否是正态白噪声序列。序列 $\{X_n, n \in Z\}$ 是否是 AR(1)模型，说明理由。

（3）用 X_n 预测 X_{n+1}，求对 X_{n+1} 的最佳均方预测 $\hat{X}_{n+1}^{*}$，并求最佳均方预测的误差 $E\left|X_{n-1} - \hat{X}_{n+1}^{*}\right|^2$。

5、考虑 M/M/1/2 排队系统。一家理发店，最多能容纳 2 个顾客，顾客到达流是参数为λ 的齐时泊松流，每个顾客的服务时间独立同分布，服从参数为μ 的指数分布且与顾客到达时间相互独立，店里只有一个服务员，记 $X(t)$ 表示店内 t 时刻的顾客数，$X(0)=0, \lambda=2, \mu=3$。

令 $\tau_1 = \inf\{X(t) != 0 : t > 0, X(0)=0\}$，$\tau_n = \inf\{X(t) != X(\tau_{n-1}) : t > \tau_{n-1}\}$，即 τ_n 表示 $X(t)$ 第 n 次跳变的时刻，$n \ge 0$，$\tau_0 = 0$，令 $\tilde{X}_n = X(\tau_n)$，$\tilde{X}_n$ 的一步转移概率矩阵为 $\tilde{P} = (\tilde{p}_{ij})$。

（1）求 $X(t)$ 的转移率矩阵 Q，求 $\tilde{X}_n$ 的一步转移概率矩阵 $\tilde{P}$，求 $P(\tilde{X}_2 = i), i = 0,1,2$，求 $P(\tau_2 < t)$。

（2）问 $\lim_{n\to\infty} E(X(\tau_n))$ 是否存在。若不存在，说明理由；若存在，求之。

（3）令 $T = \inf\{t : t > 0, X(t) = 2\}$，求 $E(T \mid X(0)=0)$。