《概率论》期中考试试卷

2003 年 4 月 14 日，开卷，每题 10 分

1. 某机器生产的产品中百分之一有缺陷. 今任取 200 件产品，试问 200 件产品全无缺陷的概率是多大？用 Poisson 逼近的方法计算所得的近似值又是多大？

2. 设 $p_1(x), p_2(y)$ 都是一维分布的密度函数，为使

$$p(x,y) = p_1(x)p_2(y) + h(x,y)$$

成为一个二维分布的密度函数，问其中的 $h(x,y)$ 必须且只需满足什么条件？

3. 叙述事件 A, B, C 相互独立的条件，并举例说明由 $P(ABC) = P(A)P(B)P(C)$ 不能推出 $P(AB) = P(A)P(B)$ 一定成立.

4. 一工人照看 n 台同一类型的机床， n 台机床排成一直行，相邻两台的间距为 a 米. 试求该工人从已照看的机床到待照看的下一台机床间行走距离的数学期望.

5. 设 $X_1, \cdots, X_n$ 为独立同分布随机变量族, 其分布为参数为 λ 的指数分布. 令 $Y_i = X_1 + \cdots + X_i$, $1 \leq i \leq n$. 试求 $Y_1, \cdots, Y_n$ 的联合分布的密度函数.

6. 假设随机变量 X 与 Y 相互独立，均服从正态分布 $N(0, \sigma^2)$, 试求 $|Y|/|X|, Y/|X|$ 和 Y/X 的密度函数.

7. 假设随机变量 ξ 与 η 相互独立， ξ 服从 $[0,1]$ 上均匀分布， η 服从二项分布 $B(n,p)$, 试求 $\xi + \eta$ 的分布函数. 请问 $\xi + \eta$ 是连续型，离散型，还是既非连续又非离散？

8. 设 $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_m, \cdots$ 为具有数学期望的独立随机变量序列，随机变量 η 只取正整数值，且与 $\{\xi_n; n \geq 1\}$ 独立，证明

$$E \sum_{k=1}^{\eta} \xi_k = \sum_{k=1}^{\infty} E\xi_k P(\eta \geq k).$$

9. 将编号为 $1, 2, \cdots, n$ 的 n 个球随机投入到 r 个盒子里，设 $n > r$, $k \geq 1$, 问恰好有 k 个空盒子的概率是多大？

10. 设 ξ 是一实随机变量， m 是一实数，满足以下条件： $P(\xi \leq m) \geq 1/2$, $P(\xi \geq m) \geq 1/2$. 称 m 为 ξ 的中位数. 记 ξ 的数学期望为 $E\xi$, 方差为 σ^2. 证明：

$$E\xi - \sigma \leq m \leq E\xi + \sigma.$$