清华大学本科生考试试题专用纸

考试课程　　　　　　　　2003年12月　　日

卷B《概率统计考试题》(03.12)　班级______　学号______　姓名______

记号：~ 服从；:= 记为；*iid* 独立同分布；*df* 分布函数；*pdf* 分布密度函数；

rv 随机变量；$r\vec{v}$ 随机向量；B(n,p) 二项分布；P(λ) Poisson 分布；Ge(p) 几何分布；Ex(λ) 指数分布；$U_{[a,b]}$ 均匀分布；$N(\mu,\sigma^2)$ 正态分布。

第一题要慎重

3分～6分　控3分

一（30分）. 填空与判正误(正确时填√，错误时填X；填入的分布必须带参数)

1. 设 $P(AB)=0.2$，$P(A)=0.5$，$P(B-A)=0.2$．则 $P(A\cup B)=$ ~~0.7~~ 及 $P(\overline{B})=$ 0.6 且事件 A 与 B 独立（√）.

$P(B)$ $B=BA+B\bar{A}$ $(B-A)$

2. 设两个相互独立的事件 A 和 B 都不发生的概率为 1/9，事件 A 发生 B 不发生的概率与事件 A 不发生 B 发生的概率相等，则 $P(A)=$ 2/3.

$P(A)=P(B)$

3. 设 $(X_1,X_2)\sim N(0,0,\sigma^2,\sigma^2,0.5)$，令 $Y_1=X_1-\frac{1}{2}X_2$，$Y_2=\frac{1}{2}X_1-X_2$，则 Y_1 和 Y_2 都有正态分布且分布参数相同（√），但不独立(√).

满秩　=正态　=正态

$(X_1,X_2)\begin{pmatrix}1 & \frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2} & 1\end{pmatrix}=(Y_1,Y_2)$

三个条件

$EY_1Y_2\neq EY_1EY_2$

4. 设有一个强度为λ的电话呼叫 Poisson 流，η_3 是其第 3 个呼叫来的时刻，试利用切贝雪夫不等式求概率 $P(|\lambda\eta_3-3|<\lambda)$ 的下限= $1-\frac{3}{\lambda^2}$

三个iid指数分布

$E\eta_3=\frac{3}{\lambda}$　$D\eta_3=\frac{3}{\lambda^2}$　$P(|\eta_3-\frac{3}{\lambda}|<1)\geq 1-\frac{D\eta_3}{\varepsilon^2}$

5. 设 *rv* X 和 Y *iid*, ~ U[-1, 1]，并如下定义 *rv* Z. 求 DZ = 1.

$$Z=\begin{cases}1 & 若X>Y\\0 & 若X=Y\\-1 & 若X<Y,\end{cases}$$

6. 设总体X的方差存在，$X_1,X_2,\ldots X_{n+1}$ 是其简单样本，令 $Y_k=\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}X_i$，$k=n,,n+1$，则用 Y_n 及 Y_{n+1} 估计 EX 时，Y_{n+1} 比 Y_n 有效（√）.

$\frac{\sigma^2}{n+1}<\frac{\sigma^2}{n}$

如果总体 X ~ $N(0,\sigma^2)$，则 $\frac{X_1+X_2}{|X_1-X_2|}$ 的分布为 t (2).（X）

t(1)

可能有理论证明

二（10分）试证指数分布的无记忆性，即如 $X\sim$ Ex(λ)，则对任意的 $s,t>0$，有 $P(X>t+s\mid X>s)=P(X>t)$.

三（10 分）. 经以往检验已确认某公司组装 PC 机的次品率为 0.04，现对该公司所组装的 PC 机 100 台逐个独立的测试.

（1）试求不少于 4 台次品的概率（只要写出精确计算的表达式）；$1-\sum_{k=0}^{3} C_{100}^{k} 0.04^{k} 0.96^{100-k}$

（2）用 Poisson 逼近定理给出此概率的近似值. $\lambda=4$ $1-\sum_{k=0}^{3}\frac{4^k}{k!}e^{-4}=0.5669$

用中心极限定理，正态逼近

四（10 分）设二维 $r\overline{v}$ (X,Y) 在矩形 $G=\{(x,y)|0\le x\le y\le 1\}$ 上服从均匀分布，试求边长为 X 和 Y 的矩形面积 S 的 pdf $f(s)$.

$F(s)=s\cancel{(2}-s-\ln s)$

$f(s)=$

$f_s(s)=\begin{cases}-\ln s & 0<s<1\\ 0 & 其它\end{cases}$

五（10 分）设 $r\overline{v}$ (X,Y) 的 pdf 为 $f(x,y)=\frac{1}{2}[\varphi_1(x,y)]+\varphi_2(x,y)]$，其中 $\varphi_1(x,y)$ 和 $\varphi_2(x,y)$ 都是二维正态 pdf，且它们对应的二维 rv 的相关系数分别为 1/3 和−1/3. 它们的边缘 pdf 所对应的 rv 的数学期望都是 0，方差都是 1.

（1）求 X 和 Y 的 pdf $f_1(x)$ 和 $f_2(x)$，及 X 和 Y 的相关系数 ρ（可以直接利用二维正态密度的性质）

（2）问 X 和 Y 是否独立?为什么？ 书上例题

六（10 分） 3 个袋子各装 $r+b$ 只球，其中红球 r 只. 今从第 1 个袋子随机取一球，放入第 2 袋子，再从第 2 袋再随机取一球，放入第 3 袋子并从中随机取一球. 令 同分布 非独立

$$X_k=\begin{cases}1, & 当第\,k\,次取出红球,\\ -1, & 反之.\end{cases}\qquad k=1,2,3.$$

则 (1) 试求 X_3 的分布; (2) 设 $r=b$, 求 X_1 和 X_2 的相关系数ρ; (3) 求 $\sum_{i=1}^{n}X_i$ 的精确分布.

c=1 的 Polya 模型 $\begin{pmatrix}\frac{b}{r+b} & \frac{r}{r+b}\end{pmatrix}$ $P(X_1X_2=1)=\frac{r+1}{2r+1}$ $\frac{1}{2r+1}$ $X\sim\begin{pmatrix}-1 & 1\\ q & p\end{pmatrix}$ $\frac{X+1}{2}=Y\sim\begin{pmatrix}0 & 1\\ q & p\end{pmatrix}$ 如独立——

七（20 分）设某糖厂用自动包装机集箱外运糖果，某日开工后在生产线上抽测 9 箱，得数据 99.3, 98.7, 100.5, 101.2, 98.3, 99.7, 99.5, 102.1, 100.5（kg）. 认为包装的每箱糖重为正态分布 N(μ, σ^2)，参数未知，取 α =0.05.

$\hat{\mu}_M=\hat{\mu}_L=\overline{X}$ $\hat{\sigma}^2_M=\hat{\sigma}^2_L=S_n^2$

（1）试给出μ 的最大似然估计值.（可利用似然估计的已有结论）

(1.35, 6.60)

（2）求σ 的置信度为 0.95 的双侧置信区间. $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1)$ $<\sigma^2<$

（3）如果规定包装机每箱装糖重量为 100kg. 问由抽测数据能否有 95%的把握断言生产线上每箱装糖重量不低于规定重量？

H_0 $\mu<100$，H_0 $\mu\ge 100=\mu_0$ $\overline{x}=99.9$

拒绝域 $\frac{\overline{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}}\le -t_{0.05}(n-1)$ 不满足 能断言 $s=1.23$

附表 $z_{0.05}=1.64$, $z_{0.025}=1.96$

$\chi^2_\alpha(n)$	$n=8$	$n=9$	$\chi^2_\alpha(n)$	$n=8$	$n=9$	$t_\alpha(n)$	$n=8$	$n=9$
α =0.95	2.733	3.325	α=0.05	15.507	16.919	α =0.05	1.8595	1.8331
α =0.975	2.180	2.700	α=0.025	17.535	19.023	α =0.025	2.3060	2.2622

H_0: $\mu\ge\mu_0=100$, H_1 $\mu<100$

拒绝域为 $\frac{\overline{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}}\le -t_{0.05}(n-1)$ 不满足 H_0 成立 能有 95% 的把握断言