清华大学本科生考试试题专用纸 葛余博

卷 A《概率论与数理统计试题》(05.01) 班级______ 学号________ 姓名________.

记号：~ 服从； := 记为； *iid* 独立同分布； *df* 分布函数； *pdf* 分布密度函数；
rv 随机变量； B(n,p) 二项分布； P(λ) Poisson 分布； Ge(p) 几何分布；
Ex(λ) 指数分布； U(a,b) 均匀分布； $N(\mu,\sigma^2)$ 正态分布； I(A)＝1，如 A 发生。

$C_3^1 0.2\cdot 0.8^2 \cdot 0.2$

$3\times0.04\times0.64$

一(36 分) 填空与判正误 (正确时填√，错误时填 X；填入的分布必须带参数)

成功 0.8

1. 对某射手打靶考核，有两次命中 6 环以下(不含 6 环)时，立即淘汰出局. 如果此射手每次命中 6 环及其以上的概率是 0.8, 则他在第 4 次射击后即被淘汰的概率是 <u>0.0768</u>。

1 2 3 4

0.2. $3\times0.2\times0.2\times0.8\times0.8=$

0.64 × 0.12 = 128 / 64 / 0.0768

2. 设三个事件 A_i, $i=1,2,3$ 两两独立，令 rv X_i $X_i=\begin{cases}1 & \text{如果 } A_i \text{ 发生}\\ -1 & \text{反之}\end{cases}$, $i=1,2,3$

则 $EX_i^2=$ <u>1</u>. 又一定有 A_1A_2 与 A_3 独立 (X)；一定有 X_1+X_2 与 X_3 独立(X).

3. 求随机相位正弦波 $X=A\sin(\omega_0+\Theta)$，其中 ω_0 是常数. rv $\Theta\sim U_{[-\pi,\pi]}$,

$A\sim\begin{pmatrix}-1 & 0 & 1\\ q & r & p\end{pmatrix}$，且两者独立，其中 $p,q,r>0, p+q+r=1$. 则 $DX=$ <u>$(p+q)/2$</u>.

$D(X)=E(X^2)-(EX)^2$
$=E(A^2\sin^2(\omega_0+\theta))-\left(E(A\sin(\omega_0+\theta))\right)^2$

$E\sin(\omega_0+\theta)=0$

4. 某箱装有 100 件产品，其中一、二和三等品分别为 80、10 和 10 件，现在随机抽取一件

令 $X_i=I$(若抽出 i 等品)，$i=1,2,3$.

则 $P(X_1X_2=0)=$ <u>1 ~~X~~</u> X_1 和 X_2 的相关系数＝ <u>~~$-\frac{2}{3}$~~ ~~0~~</u>

若 $X_1=0$ 则不是一等品
若 $X_2=0$ 则不是二等品

$X_i=\begin{cases}1 & \text{是}i\text{等}\\ 0 & \text{不是}\end{cases}$

$P(X_1X_2\neq0)=\frac{1}{5}+\frac{9}{10}-\frac{9}{50}$
$=\frac{40}{50}=\frac{4}{5}$

$P\{X_1=0\}=\frac{20}{100}=\frac{1}{5}$ $P(X_2=0)=\frac{90}{100}=\frac{9}{10}$

5. 设总体 X 二阶矩存在，$X_1, X_2, \ldots, X_n$ 是其简单样本，$n>1$，样本均值为 $\bar{X}$. $\frac{4}{5}$

则对 X 期望估计时，$(X_1+\bar{X})/2$ 比 $\bar{X}$ 更有效；(X)

利用切贝雪夫定理，$(X_1+\bar{X})/2$ 以概率收敛于 μ，因此是一致估计. (√)

有两[illegible]

$\frac{1}{10}$

X_1	1	0
P	$\frac{4}{5}$	$\frac{1}{5}$

$E(X_1)=\frac{4}{5}$

X_2	1	0
P	$\frac{1}{10}$	$\frac{9}{10}$

$E(X_2)=\frac{1}{10}$

6. 设 $X_1, X_2, \ldots, X_n$ 是下列总体 $X\sim Ex(\lambda)$ 的大小为 n 的简单样本，

则 $P(X_1<X_2)=$ <u>$\frac{1}{2}$</u>，而 n 足够大时样本均值 $\bar{X}$ 的近似分布 <u>$N(\frac{1}{\lambda},\frac{1}{n\lambda^2})$</u>.

X_1X_2	1	0
P	$\frac{2}{25}$	$\frac{23}{25}$

7. 设总体 $X\sim N(\mu_1,\sigma^2)$，总体 $Y\sim N(\mu_2,\sigma^2)$，且两个总体独立. 从总体 X 和 Y 分别抽取容量是 n_1 和 n_2 的简单随机样本，分别算得样本方差为 S_1^2 和 S_2^2.

则 $D(S_1^2+S_2^2)=$ <u>$2\sigma^4\left(\frac{1}{n_1-1}+\frac{1}{n_2-1}\right)$</u>

$E(X_1X_2)=\frac{2}{25}$

$Cov(X_1,X_2)=\frac{2}{25}-\frac{2}{25}=0$

二(10分) 设有 n 个袋子，各装 $r+b$ 只球，其中红球 r 只. 今从第 1 个袋子随机取一球，放入第 2 个袋子，再从第 2 个袋子再随机取一球，放入第 3 个袋子，如此继续.

$$X_k=\begin{cases}1, & \text{当第 } k \text{ 次取出红球},\\ -1, & \text{反之}\end{cases}\qquad k=1,2,\dots n$$

$X_k \sim \begin{array}{c|c} 0 & 1 \\ \hline \frac{b}{r+b} & \frac{r}{r+b}\end{array}$

(1) 试求 X_k 的分布；　(2) 设 $r=b$，求 X_1 和 X_2 的相关系数 r. $\frac{1}{2r+1}$

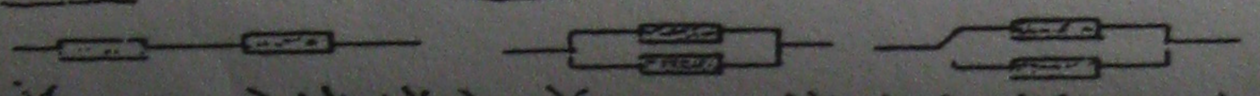
$EX_1=0$. $EX_2=0$.

三(10分) 设(X,Y)的 pdf 为　$f(x,y)=\lambda^2 e^{-\lambda x} I(0<y<x)$　，（$\lambda>0$）

（1）证明 $rv\ Y$ 有如下性质：对任意的 $s,t>0$，有 $P(Y>t+s\mid Y>s)=P(Y>t)$.

（2）求 EX。 $\lambda^2 x e^{-\lambda x}$　$\frac{2}{\lambda}$

四(12分) 用两个独立的同类设备分别组成串联、并联及备用（即当一个接通的设备不能工作时系统立即自动接通另外一个备用设备）系统. 如此类设备的寿命为 $Ex(\lambda)$, $\lambda>0$, 试求三个系统在时刻 t (>0) 前失效的概率和三个系统的平均失效时间.



$Y_1=\min(X_1,X_2)$　$Y_2=\max(X_1,X_2)$　$Y_3=X_1+X_2$

$\frac{1}{2\lambda}$，$\frac{2}{\lambda}-\frac{1}{2\lambda}$，$\frac{2}{\lambda}$

五(10分) 设在$(s,t]$ 时段内到某个网站访问的次数 $\xi_{(s,t]}\sim P(\lambda(t-s))$, $\forall t>s\ge 0$, λ 为正常数.

(1). 如果 $\lambda=5$, η_2 为第 2 次访问该网站的时刻. 利用切贝雪夫不等式求概率 $P(|\lambda\eta_2-2|<\lambda)$ 的下限;

(2). 引入记号 $N_t:=\xi_{(0,t]}$,　$0\le\forall t<+\infty$, 计算 $E(N_t\mid N_s=k)$,　$0\le s<t<+\infty$.

六(10分) 设 $rv\ X$ 的分布函数为 $F(x;\alpha,\beta)=[1-(\alpha/x)^{\beta}]\,I(x>\alpha)$，其中参数 $\alpha>0,\beta>1$，设 $X_1,X_2\cdots X_n$ 为来自总体 X 的简单随机样本，

$f(x)=\begin{cases}\beta\alpha^{\beta}x^{-(\beta+1)} & x>\alpha\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$

(1) 当 $\alpha=1$，β 未知时，求 $\hat{\beta}_M$；　(2) 当 $\beta=2$，α 未知时，求 $\hat{\alpha}_L$。

$\hat{\beta}_M=\frac{\bar{X}}{\bar{X}-1}$　$L=(\beta\alpha^{\beta})^n\cdot\prod_{i=1}^{n}x_i^{-(\beta+1)}=2^n\alpha^{2n}\cdot\prod_{i=1}^{n}x_i^{-3}$

$\ln L=n\ln 2+2n\ln\alpha-3\sum\ln x_i$　$\frac{\partial\ln L}{\partial\alpha}=\frac{2n}{\alpha}$　$\hat{\alpha}_L=\min$

七(12分) 为提高某一化学生产过程的得率，试图采用一种新的催化剂. 试验中，设采用原来催化剂的和新催化剂的各进行了 $n_1=n_2=8$ 次试验，而得到得率的平均值分别为 $\bar{x}_1=91.73$ 和 $\bar{x}_2=93.75$，样本方差 $s_1^2=3.82$ 和 $s_2^2=4.02$. 假设两总体都可认为服从正态分布，且独立，

(1) 可否认为两个总体的方差相等？（作假设检验，取显著性水平 $\alpha=0.05$） $H_0: \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}=1$

(2) 在(1)的基础上，给出两总体均值差 $\mu_1-\mu_2$ 的置信度为 0.95 的单侧置信下限.

附表　$z_{0.05}=1.64$,　$z_{0.025}=1.96$

$\chi_\alpha^2(n)$	$n=14$	$n=16$	$\chi_\alpha^2(n)$	$n=14$	$n=16$	$t_\alpha(n)$	$n=14$	$n=16$
$\alpha=0.95$	6.571	7.962	$\alpha=0.05$	23.685	26.296	$\alpha=0.05$	1.7613	1.7459
$\alpha=0.975$	5.629	6.908	$\alpha=0.025$	26.119	28.845	$\alpha=0.025$	2.1448	2.1199
$F_\alpha(n,m)$	$n=7$	$m=7$	$F_\alpha(n,m)$	$n=7$	$m=8$	$F_\alpha(n,m)$	$n=8$	$m=8$
$\alpha=0.05$	3.79		$\alpha=0.05$	3.50		$\alpha=0.05$	3.44	
$\alpha=0.025$	4.99		$\alpha=0.025$	4.90		$\alpha=0.025$	4.43	