温故知新之：常微分方程与差分方程

1. 常系数线性常微分方程

- **Newton** 的微积分基本定理与最简单的常微分方程：

$$\frac{d}{dt}x = x' = f(t)$$

这样的 $x(t)$ 是函数 $f(t)$ 的原函数，根据 Newton 微积分基本定理，

$$\boxed{x(t) = x(0) + \int_0^t f(s)ds}$$

- 常系数线性齐次一阶常微分方程：

$$\frac{d}{dt}x = x' = ax$$

利用分离变量法可以得到这个微分方程的通解：

$$\boxed{x(t) = e^{at}x(0)}$$

- 常系数线性非齐次一阶常微分方程：

$$\frac{d}{dt}x = x' = ax + b(t)$$

利用常数变易法，即令

$$x(t) = e^{at}y(t)$$

得到

$$y' = x'e^{-at} - ae^{-at}x = axe^{-at} + b(t) - ae^{-at}x = b(t)\,,$$

$$y(0) = x(0)\,,$$

所以

$$y(t) = y(0) + \int_0^t b(s)ds = x(0) + \int_0^t b(s)ds\,,$$

$$\boxed{x(t) = e^{at}x(0) + e^{at}\int_0^t b(s)ds}$$

- 常系数线性齐次高阶常微分方程、特征多项式与基础解系：

$$x^{(n)} + a_1 x^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}x' + a_n x = 0$$

记

$$P(\square) = \square^n + a_1\square^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\square + a_n$$

为一个以□为未定元的多项式，其中□是一种操作，$\square^k$ 表示连续实施 k 次□的操作，因此上述多项式是一种操作。比如，当□为常数 λ 时，我们把□理解为“用常数 λ 乘以”，于是 $P(\lambda)[1]$ 表示对 1 实施 $P(\lambda)$ 的操作，这样就得到通常的 $\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\lambda + a_n$；当□为 $\dfrac{d}{dt}$ 时，

我们把□理解为 “关于变量t求导”，于是上述微分方程就写成$P\left(\dfrac{d}{dt}\right)[x]=0$。

由于$\dfrac{d}{dt}\left(e^{\lambda t}\right)=\lambda e^{\lambda t}$，所以

$$P\left(\frac{d}{dt}\right)[e^{\lambda t}]=P(\lambda)e^{\lambda t}$$

简而言之，指数函数$e^{\lambda t}$是线性微分算子$P\left(\dfrac{d}{dt}\right)$的一个特征向量，对应特征值为$P(\lambda)$。我们称多项式$P(\lambda)$为上述微分方程的特征多项式：如果$\lambda$是特征多项式$P(\lambda)$的根（即$P(\lambda)=0$，称为上述微分方程的特征根），则$e^{\lambda t}$是上述微分方程的解。

如果$\lambda_1,\cdots,\lambda_k$是两两不同的特征根，则$e^{\lambda_1 t},\ldots,e^{\lambda_k t}$是上述微分方程的线性无关解：

若$C_1e^{\lambda_1 t}+\cdots+C_ke^{\lambda_k t}=0$，则对这个恒等式两边依次求关于$t$的直到$k-1$阶的导数，就得到

$$\begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & e^{\lambda_2 t} & \cdots & e^{\lambda_k t} \\ \lambda_1 e^{\lambda_1 t} & \lambda_2 e^{\lambda_2 t} & \cdots & \lambda_k e^{\lambda_k t} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_1^{k-1}e^{\lambda_1 t} & \lambda_2^{k-1}e^{\lambda_2 t} & \cdots & \lambda_k^{k-1}e^{\lambda_k t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ \vdots \\ C_k \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_k \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_1^{k-1} & \lambda_2^{k-1} & \cdots & \lambda_k^{k-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t}C_1 \\ e^{\lambda_2 t}C_2 \\ \vdots \\ e^{\lambda_k t}C_k \end{pmatrix}=0,$$

不难知道

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_k \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_1^{k-1} & \lambda_2^{k-1} & \cdots & \lambda_k^{k-1} \end{pmatrix}=\prod_{1\le j<i\le k}(\lambda_i-\lambda_j)\neq 0$$

所以必然有$C_1=\cdots=C_k=0$。

注意到

$$\begin{aligned} P\left(\frac{d}{dt}\right)\left[t^k e^{\lambda t}\right] &= P\left(\frac{d}{dt}\right)\left[\frac{d^k}{d\lambda^k}e^{\lambda t}\right]=\frac{d^k}{d\lambda^k}\left[P\left(\frac{d}{dt}\right)\left[e^{\lambda t}\right]\right] \\ &= \frac{d^k}{d\lambda^k}\left[P(\lambda)e^{\lambda t}\right]=\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{\lambda}P^{(j)}(\lambda)t^{k-j}e^{\lambda t} \end{aligned}$$

所以，当λ是特征多项式$P(\lambda)$的m重根时，即

$$P(\lambda)=P'(\lambda)=\cdots=P^{(m-1)}(\lambda)=0$$

对任意$0\le k<m$

$$P\left(\frac{d}{dt}\right)\left[t^k e^{\lambda t}\right]=\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{\lambda}P^{(j)}(\lambda)t^{k-j}e^{\lambda t}=0$$

即 $e^{\lambda t}, te^{\lambda t}, \ldots, t^{m-1}e^{\lambda t}$ 都是微分方程的解，并且明显它们是线性无关的。

由常微分方程的基本定理，上述微分方程的解由初始条件

$$x(0), x'(0), \ldots, x^{(n-1)}(0)$$

唯一确定，所以上述线性常微分方程的通解为

$$\boxed{x(t)=\sum_{\lambda\text{是特征根}}\sum_{j=0}^{\lambda\text{的重数}-1}C_{\lambda,j}t^j e^{\lambda t}}$$

■ <u>常系数线性非齐次高阶常微分方程、常数变易法</u>：

$$x^{(n)}+a_1x^{(n-1)}+\cdots+a_{n-1}x'+a_nx=f(t)$$

这个方程的通解是

$$\boxed{x(t)=x^*(t)+\sum_{\lambda\text{是特征根}}\sum_{j=0}^{\lambda\text{的重数}-1}C_{\lambda,j}t^j e^{\lambda t}}$$

其中 $x^*(t)$ 是这个微分方程的一个特解。

求解非齐次方程的常用方法是常数变易法：即把齐次方程通解中的常数 C 变成函数 $C(t)$：

$$x(t)=\sum_{\lambda\text{是特征根}}\sum_{j=0}^{\lambda\text{的重数}-1}C_{\lambda,j}(t)t^j e^{\lambda t}$$

对它求导得到

$$x'(t)=\sum_{\lambda\text{是特征根}}\sum_{j=0}^{\lambda\text{的重数}-1}C_{\lambda,j}{}'(t)t^j e^{\lambda t}+\sum_{\lambda\text{是特征根}}\sum_{j=0}^{\lambda\text{的重数}-1}C_{\lambda,j}(t)\left(t^j e^{\lambda t}\right)'$$

然后令

$$\sum_{\lambda\text{是特征根}}\sum_{j=0}^{\lambda\text{的重数}-1}C_{\lambda,j}{}'(t)t^j e^{\lambda t}=0$$

得到 $C_{\lambda,j}{}'(t)$ 满足的第一个线性方程，这样

$$x'(t)=\sum_{\lambda\text{是特征根}}\sum_{j=0}^{\lambda\text{的重数}-1}C_{\lambda,j}(t)\left(t^j e^{\lambda t}\right)'$$

对它再次求导，

$$x''(t)=\sum_{\lambda\text{是特征根}}\sum_{j=0}^{\lambda\text{的重数}-1}C_{\lambda,j}{}'(t)\left(t^j e^{\lambda t}\right)'+\sum_{\lambda\text{是特征根}}\sum_{j=0}^{\lambda\text{的重数}-1}C_{\lambda,j}(t)\left(t^j e^{\lambda t}\right)''$$

再令

$$\sum_{\lambda\text{是特征根}}\sum_{j=0}^{\lambda\text{的重数}-1} C_{\lambda,j}{}'(t)\left(t^j e^{\lambda t}\right)' = 0$$

得到

$$x''(t) = \sum_{\lambda\text{是特征根}}\sum_{j=0}^{\lambda\text{的重数}-1} C_{\lambda,j}(t)\left(t^j e^{\lambda t}\right)''$$

如此这样一直求得 $x(t)$ 的 $n-1$ 阶导数，并得到 $C_{\lambda,j}{}'(t)$ 满足的 $n-1$ 个线性方程，最后求得 $x(t)$ 的 n 阶导数，代回原始方程得到 $C_{\lambda,j}{}'(t)$ 满足的第 n 个线性方程。求解 $C_{\lambda,j}{}'(t)$ 满足的线性方程组（由于基础解系 $\left\{t^j e^{\lambda t}\right\}$ 是 n 个线性无关向量，这个线性方程组有唯一解）得到 $C_{\lambda,j}{}'(t)$ 的表达式，从而解得 $C_{\lambda,j}(t)$，进而得到非齐次方程的通解

$$x(t) = \sum_{\lambda\text{是特征根}}\sum_{j=0}^{\lambda\text{的重数}-1} C_{\lambda,j}(t) t^j e^{\lambda t}$$

- 例：

$$x'' + 4x' + 4x = \sin(t)$$

特征方程为

$$P(\lambda) = \lambda^2 + 4\lambda + 4 = (\lambda+2)^2$$

齐次方程通解为

$$x(t) = C_1 e^{-2t} + C_2 t e^{-2t}$$

利用常数变易法，令

$$x(t) = C_1(t) e^{-2t} + C_2(t) t e^{-2t}$$

于是

$$x'(t) = C_1{}'(t)e^{-2t} + C_2{}'(t)te^{-2t} - 2C_1(t)e^{-2t} - 2C_2(t)te^{-2t} + C_2(t)e^{-2t},$$

令 $\boxed{C_1'(t) = -C_2'(t)t}$，则

$$x'(t) = -2C_1(t)e^{-2t} - 2C_2(t)te^{-2t} + C_2(t)e^{-2t} = -2x(t) + C_2(t)e^{-2t},$$

于是

$$\begin{aligned} x''(t) + 4x'(t) + 4x(t) &= \left[x'(t) + 2x(t)\right]' + 2\left[x'(t) + 2x(t)\right] \\ &= C_2{}'(t)e^{-2t} - 2C_2(t)e^{-2t} + 2C_2(t)e^{-2t} = C_2{}'(t)e^{-2t} \end{aligned},$$

因此

$$\boxed{C_2{}'(t) = e^{2t}\sin(t)},$$

故

$$C_2(t)=C_2(0)+\int_0^t e^{2s}\sin(s)ds=C_2(0)+\frac{2}{5}\sin(t)e^{2t}-\frac{1}{5}\cos(t)e^{2t}+\frac{1}{5}$$

$$C_1(t)=C_1(0)-\int_0^t se^{2s}\sin(s)ds=C_1(0)+\frac{3-10t}{25}\sin(t)e^{2t}+\frac{5t-4}{25}\cos(t)e^{2t}+\frac{4}{25}$$

因此

$$x(t)=\left(C_1(0)+\frac{4}{25}\right)e^{-2t}+\left(C_2(0)+\frac{1}{5}\right)te^{-2t}+\frac{3}{25}\sin(t)-\frac{4}{25}\cos(t),$$

$$x(0)=C_1(0),$$

$$x'(0)=-2C_1(0)+C_2(0)$$

所以非齐次微分方程的通解为

$$x(t)=\left(x(0)+\frac{4}{25}\right)e^{-2t}+\left(2x(0)+x'(0)+\frac{1}{5}\right)te^{-2t}+\frac{3}{25}\sin(t)-\frac{4}{25}\cos(t)$$

2. 常系数线性差分方程

- <u>常系数线性齐次一阶差分方程</u>：比如复利方式计算的本金（俗称“利滚利”或“驴打滚”）

$$x_{n+1}=ax_n$$

这个差分方程的通解为：

$$\boxed{x_n=a^n x_0}$$

- <u>常系数线性非齐次一阶差分方程</u>：

$$x_{n+1}=ax_n+b_n$$

（比如按揭贷款的定期还款，x_n 是期初贷款余额，$-b_n$ 是当期还款额）。利用常数变易法，即令

$$x_n=a^n y_n$$

得到

$$y_{n+1}=x_{n+1}a^{-n-1}=(ax_n+b_n)a^{-n-1}=x_na^{-n}+b_na^{-n-1}=y_n+\frac{b_n}{a^{n+1}},$$

$$y_0=x_0,$$

所以

$$y_n=y_0+\sum_{k=0}^{n-1}\frac{b_k}{a^{k+1}}=x_0+\sum_{k=0}^{n-1}\frac{b_k}{a^{k+1}},$$

$$\boxed{x_n=x_0a^n+\sum_{k=0}^{n-1}b_ka^{n-k-1}}$$

- <u>常系数线性齐次高阶差分方程</u>：

$$x_{n+m}+a_1x_{n+m-1}+\cdots+a_{n-1}x_{m+1}+a_nx_m=0$$

记

$$P(\square) = \square^n + a_1 \square^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\square + a_n$$

为一个以 $\square$ 为未定元的多项式，其中 $\square$ 是一种操作，$\square^k$ 表示连续实施 k 次 $\square$ 的操作，因此上述多项式是一种操作。

对数列 $\left(x_m\right)_{m=0}^{\infty}$，定义左平移操作

$$\sigma\left[\left(x_m\right)_{m=0}^{\infty}\right] = \left(x_{m+1}\right)_{m=0}^{\infty}。$$

$\left(x_m\right)_{m=0}^{\infty}$ 是上述差分方程的解当且仅当 $P(\sigma)\left[\left(x_m\right)_{m=0}^{\infty}\right] = 0$。

由于 $\sigma\left[\left(\lambda^m\right)_{m=0}^{\infty}\right] = \left(\lambda^{m+1}\right)_{m=0}^{\infty} = \lambda\left(\lambda^m\right)_{m=0}^{\infty}$，所以

$$P\left(\sigma\right)\left[\left(\lambda^m\right)_{m=0}^{\infty}\right] = P(\lambda)\left(\lambda^m\right)_{m=0}^{\infty}$$

也就是说，等比数列 $\left(\lambda^m\right)_{m=0}^{\infty}$ 是线性算子 $P(\sigma)$ 的特征向量，对应特征值为 $P(\lambda)$。我们称多项式 $P(\lambda)$ 为上述差分方程的特征多项式：如果 λ 是特征多项式 $P(\lambda)$ 的根（即 $P(\lambda)=0$，称为上述差分方程的特征根），则 $\left(\lambda^m\right)_{m=0}^{\infty}$ 是上述差分方程的解。

如果 $\lambda_1,\cdots,\lambda_k$ 是两两不同的特征根，则 $\left(\lambda_1^m\right)_{m=0}^{\infty},\ldots,\left(\lambda_k^m\right)_{m=0}^{\infty}$ 是上述微分方程的线性无关解：

若 $C_1\lambda_1^m + \cdots + C_k\lambda_k^m = 0$，则

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_k \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_1^{k-1} & \lambda_2^{k-1} & \cdots & \lambda_k^{k-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ \vdots \\ C_k \end{pmatrix} = 0,$$

不难知道

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_k \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_1^{k-1} & \lambda_2^{k-1} & \cdots & \lambda_k^{k-1} \end{pmatrix} = \prod_{1\le j<i\le k}(\lambda_i - \lambda_j) \ne 0$$

所以必然有 $C_1 = \cdots = C_k = 0$。

注意到

$$\sigma^l\left[\left(m^k\lambda^m\right)_{m=0}^{\infty}\right] = \left((m+l)^k\lambda^{m+l}\right)_{m=0}^{\infty} = \left(\left(\lambda\frac{d}{d\lambda}\right)^k\lambda^{m+l}\right)_{m=0}^{\infty} = \left(\left(\lambda\frac{d}{d\lambda}\right)^k\left(\sigma^l\left[\lambda^m\right]\right)_m\right)_{m=0}^{\infty}$$

所以

$$P(\sigma)\left[m^k\lambda^m\right]=\left(\lambda\frac{d}{d\lambda}\right)^k\left[P(\sigma)\left[\lambda^m\right]\right]=\left(\lambda\frac{d}{d\lambda}\right)^k\left(P(\lambda)\lambda^m\right)$$

于是，当λ是特征多项式$P(\lambda)$的q重根时，即

$$P(\lambda)=P'(\lambda)=\cdots=P^{(q-1)}(\lambda)=0$$

则对任意$0\le k<q$，即$\left(\lambda^m\right)_{m=0}^{\infty},\left(m\lambda^m\right)_{m=0}^{\infty},\ldots,\left(m^{q-1}\lambda^m\right)_{m=0}^{\infty}$都是差分方程的解，并且明显它们是线性无关的。

由差分方程的基本定理，上述差分方程的解由初始条件

$$x_0,x_1,\ldots,x_{n-1}$$

唯一确定，所以上述线性差分方程的通解为

$$\boxed{x_m=\sum_{\lambda\text{是特征根}}\sum_{j=0}^{\lambda\text{的重数}-1}C_{\lambda,j}m^j\lambda^m}$$

■ 常系数线性非齐次高阶差分方程：

$$x_{n+m}+a_1x_{n+m-1}+\cdots+a_{n-1}x_{m+1}+a_nx_m=b_m$$

这个方程的通解是

$$\boxed{x_m=x_m^*+\sum_{\lambda\text{是特征根}}\sum_{j=0}^{\lambda\text{的重数}-1}C_{\lambda,j}m^j\lambda^m}$$

其中x_m^*是这个差分方程的一个特解。

■ 例：

$$x_{m+2}+4x_{m+1}+4x_m=5$$

特征方程为

$$P(\lambda)=\lambda^2+4\lambda+4=(\lambda+2)^2$$

齐次方程通解为

$$x_m=A(-2)^m+Bm(-2)^m$$

利用常数变易法，令

$$x_m=A_m(-2)^m+B_mm(-2)^m$$

于是

$$\begin{aligned}x_{m+1}+2x_m&=A_{m+1}(-2)^{m+1}+B_{m+1}(m+1)(-2)^{m+1}-A_m(-2)^{m+1}-B_mm(-2)^{m+1}\\&=a_{m+1}(-2)^{m+1}+b_{m+1}(m+1)(-2)^{m+1}+B_m(-2)^{m+1}\end{aligned},$$

其中

$$A_{m+1}=A_m+a_{m+1},\qquad B_{m+1}=B_m+b_{m+1}$$

令

$$a_{m+1}+b_{m+1}(m+1)=0$$

则

$$x_{m+1}+2x_m=B_m(-2)^{m+1}$$

$$x_{m+2}+4x_{m+1}+4x_m=\left[x_{m+2}+2x_{m+1}\right]+2\left[x_{m+1}+2x_m\right]=B_{m+1}(-2)^{m+2}-B_m(-2)^{m+2}=5$$

因此

$$B_{m+1}=B_m+5\times\left(-\frac{1}{2}\right)^{m+2}=B_m+\frac{5}{4}\times\left(-\frac{1}{2}\right)^m$$

所以

$$B_m=B_0+\frac{5}{4}\times\frac{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^m}{1+\frac{1}{2}}=B_0+\frac{5}{6}-\frac{5}{6}(-2)^{-m},\qquad b_{m+1}=\frac{5}{4}\times\left(-\frac{1}{2}\right)^m$$

于是

$$a_{m+1}=-(m+1)b_{m+1}=-(m+1)\times\frac{5}{4}\times\left(-\frac{1}{2}\right)^m$$

故

$$\begin{aligned}A_m&=A_0+\sum_{k=0}^{m-1}a_{k+1}=A_0-\frac{5}{4}\sum_{k=0}^{m-1}(k+1)\left(-\frac{1}{2}\right)^k\\&=A_0-\frac{5}{4}\sum_{k=0}^{m-1}\left(q^{k+1}\right)'\Big|_{q=-\frac{1}{2}}=A_0-\frac{5}{4}\left(\sum_{k=0}^{m-1}q^{k+1}\right)'\Bigg|_{q=-\frac{1}{2}}\\&=A_0-\frac{5}{9}+\frac{5}{9}(-2)^{-m}-\frac{5m}{6}\end{aligned}$$

由此得差分方程的通解

$$x_m=\left(A_0-\frac{5}{9}\right)(-2)^m+\left(B_0+\frac{5}{6}\right)m(-2)^m+\frac{5}{9}$$

■ **数列的母函数**

给定一个数列$\{x_m\}_{m=0}^{\infty}$，我们可以给它对应一个形式幂级数

$$g(z)=\sum_{m\geq 0}x_m z^m$$

称这个形式幂级数为数列$\{x_m\}_{m=0}^{\infty}$的生成函数或母函数。数列的研究可以转化为对它的母函数的研究。

我们以求解差分方程

$$x_{m+2}+4x_{m+1}+4x_m=5$$

为例，说明母函数的用途。

在上述差分方程两端乘以 z^{m+2}，然后对 m 求和，得到

$$\sum_{m\ge 0}(x_{m+2}+4x_{m+1}+4x_m)z^{m+2}=5\sum_{m\ge 0}z^{m+2}$$

故

$$g(z)-x_1z-x_0+4\left[zg(z)-zx_0\right]+4z^2g(z)=5\sum_{j\ge 2}z^j$$

所以，

$$g(z)=\frac{x_0+(4x_0+x_1)z+\sum_{j\ge 2}5z^j}{1+4z+4z^2}=\left(x_0+(4x_0+x_1)z+\sum_{j\ge 2}5z^j\right)\left(\sum_{k\ge 0}(-2z)^k\right)^2$$

比较等式两边 z^m 的系数，得到

$$\begin{aligned}
x_m &= x_0\sum_{k+k'=m}(-2)^k(-2)^{k'}+(4x_0+x_1)\sum_{k+k'=m-1}(-2)^k(-2)^{k'}+\sum_{2\le j\le m}5\sum_{k+k'=m-j}(-2)^k(-2)^{k'}\\
&=x_0(-2)^m(m+1)+(4x_0+x_1)(-2)^{m-1}m+\sum_{2\le j\le m}5(-2)^{m-j}(m-j+1)\\
&=x_0(-2)^m(m+1)-\frac{4x_0+x_1}{2}(-2)^m m+\frac{5}{9}+\frac{5m}{6}(-2)^m-\frac{5}{9}(-2)^m\\
&=\left(x_0-\frac{5}{9}\right)(-2)^m+\left(\frac{5}{6}-x_0-\frac{x_1}{2}\right)m(-2)^m+\frac{5}{9}
\end{aligned}$$

这与前面得到的结果本质上是一样的，用母函数求解过程要简洁得多，但其中要用到一些有理分式在原点的 Taylor 展开式。