概率论与数理统计第二次习题课题目

题1 设连续型随机变量X的分布函数为:

$$F(x)=\begin{cases}Ae^{x}, & x<0;\\ B, & 0\le x<1;\\ 1-Ae^{-(x-1)}, & x\ge 1.\end{cases}$$

求：(a) A、B的值。(b) X的密度函数。(c) $P(X>1/3)$的值。(d) X的数学期望和方差。

题2 设随机变量X服从$(-\pi/2,\pi/2)$上的均匀分布。
求：(a) 随机变量$Y=\cos X$的概率密度函数。(b) Y的数学期望和方差。

题3 设随机变量U服从$[0,1]$上的均匀分布，函数$F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 满足以下三个条件

1. 对任何$x\in\mathbb{R}$，$F(-\infty)=0\le F(x)\le 1=F(+\infty)$；
2. F单调不减；
3. F在所有$x\in\mathbb{R}$处都是右连续的。

证明：

1. 如果F连续且严格单调增，则随机变量$X=F^{-1}(U)$的概率分布函数就是F；
2. 一般情况下，即F不严格单调增或在某些x处不连续时，随机变量

$$X=\inf\{x\in\mathbb{R}|F(x)\ge U\}$$

的概率分布函数就是F 。

题4 袋中装有N个球，其中白球数为随机变量，设为X，已知$EX=n$（n可以不是整数）。证明从该袋中摸出一球为白球的概率是n/N。并用这个结论解决第一次习题课第3题。

题5 若一个离散型随机变量X在某个点上的概率达到最大，则称该点为“众数”(mode)。分别求二项分布、泊松分布和负二项分布的众数。

题6 求实数c使$E|X-c|$达到最小。一般地，对$0<p<1$，求实数c使得

$$E\big[p\max\{X-c,0\}-(1-p)\min\{X-c,0\}\big]$$

达到最小。