概率论与数理统计第三次习题课题目解答

题1 设随机变量X与Y独立，均服从参数为1的指数分布，求$U=X+Y$，$V=\frac{X}{X+Y}$的联合概率密度函数，并判断独立性。一般地，考虑X,Y为独立Gamma分布（参数分别是(α,λ)和(β,λ)）随机变量的情形。

<u>解</u>：参数为1的指数分布相当于参数为$(1,1)$的Gamma分布。所以我们直接考虑一般情形。由

$$\begin{cases} u &= x+y, \\ v &= \frac{x}{x+y}, \end{cases}$$

解得

$$\begin{cases} x &= uv, \\ y &= u-uv \end{cases}.$$

于是U,V的联合概率密度函数为

$$\begin{aligned} f_{U,V}(u,v) &= f_{X,Y}(x,y)\left|\det\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix}\right| \\ &= f_X(uv)f_Y(u-uv)\left|\det\begin{pmatrix} v & u \\ 1-v & -u \end{pmatrix}\right| \\ &= \frac{\lambda^\alpha(uv)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}e^{-\lambda uv}I_{uv>0}\cdot\frac{\lambda^\beta(u-uv)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)}e^{-\lambda(u-uv)}I_{u-uv>0}\cdot|u| \\ &= \frac{\lambda^{\alpha+\beta}u^{\alpha+\beta-1}}{\Gamma(\alpha+\beta)}e^{-\lambda u}I_{u>0}\cdot\frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}v^{\alpha-1}(1-v)^{\beta-1}I_{0<v<1}. \end{aligned} \tag{*}$$

注意到上式中，

$$\frac{\lambda^{\alpha+\beta}u^{\alpha+\beta-1}}{\Gamma(\alpha+\beta)}e^{-\lambda u}I_{u>0}$$

是参数为$(\alpha+\beta,\lambda)$的Gamma分布的概率密度函数，(*)式两端关于u在$(-\infty,+\infty)$上积分，得到

$$f_V(v)=\int_{-\infty}^{+\infty}f_{U,V}(u,v)du=\frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}v^{\alpha-1}(1-v)^{\beta-1}I_{0<v<1},$$

因此V服从参数为(α,β)的Beta分布。再对(*)两端关于v在$(-\infty,+\infty)$上积分，得到

$$f_U(u)=\int_{-\infty}^{+\infty}f_{U,V}(u,v)dv=\frac{\lambda^{\alpha+\beta}u^{\alpha+\beta-1}}{\Gamma(\alpha+\beta)}e^{-\lambda u}I_{u>0},$$

因此U服从参数为$(\alpha+\beta,\lambda)$的Gamma分布，并且U,V独立。

注：随机变量函数的概率密度公式有两个等价的表达式

$$f_{U,V}(u,v) = f_{X,Y}(x,y)\frac{1}{\left|\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\right|} = f_{X,Y}(x,y)\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|,$$

其中$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}$是二元函数$u(x,y)$和$v(x,y)$的导数（即Jacobi矩阵）的行列式（也称Jacobian）。第二个等号是因为原函数与反函数的导数是互逆的线性变换，而两个互逆的线性变换的行列式互为倒数。在实际问题中要视变换的形式选择其中一种方式确定概率密度函数。在我们这个例子里，我们选择了逆变换$x = uv, y = u - uv$，因为对它求导要比对原变换$u = x + y, v = x/(x + y)$求导简单。

题2 设随机变量X, Y的联合概率密度函数为

$$f_{X,Y}(x,y) = \frac{1 + xy(x^2 - y^2)}{4}, \qquad |x| \le 1, |y| \le 1.$$

求$X + Y$的概率分布函数F_{X+Y}。

解法1：

$$\begin{aligned}
f_{X+Y}(u) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(u-v,v)dv \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1 + (u-v)v[(u-v)^2 - v^2]}{4} I_{|u-v|\le 1, |v| \le 1} dv \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1 + (u-v)v[u^2 - 2uv]}{4} I_{u-1\le v\le 1+u, -1\le v\le 1} dv \\
&= I_{\max\{u-1,-1\}\le \max\{u+1,1\}} \int_{\max\{u-1,-1\}}^{\min\{u+1,1\}} \frac{1 + (u-v)v[u^2 - 2uv]}{4} dv \\
&= I_{-2\le u\le 2} \int_{\frac{u}{2}-1+\left|\frac{u}{2}\right|}^{\frac{u}{2}+1-\left|\frac{u}{2}\right|} \frac{1 + (u-v)v[u^2 - 2uv]}{4} dv \\
&= I_{-2\le u\le 2} \int_{-1+\left|\frac{u}{2}\right|}^{1-\left|\frac{u}{2}\right|} \frac{1 - 2u\left[\frac{u^2}{4} - w^2\right]w}{4} dw \qquad \left(\text{注意积分的对称性，令} w = v - \frac{u}{2}\right) \\
&= I_{-2\le u\le 2} \int_{-1+\left|\frac{u}{2}\right|}^{1-\left|\frac{u}{2}\right|} \frac{1}{4} dw \\
&= I_{-2\le u\le 2} \frac{2 - |u|}{4}.
\end{aligned}$$

于是

$$
\begin{aligned}
F_{X+Y}(z) &= \int_{-\infty}^{z} f_{X+Y}(u)du = \int_{-2}^{\min\{2,z\}} \frac{2-|u|}{4}du \\
&= I_{z\geq 2} + I_{-2\leq z<2}\left(\frac{1}{2} + \int_0^z \frac{2-u\cdot \operatorname{sgn}(z)}{4}du\right) \\
&= I_{z\geq 2} + I_{-2\leq z<2}\left(\frac{1}{2} + \frac{z}{2} - \frac{z^2\cdot \operatorname{sgn}(z)}{8}\right) \\
&= I_{z\geq 2} + I_{-2\leq z<2}\left(\frac{1}{2} + \frac{z}{2} - \frac{z|z|}{8}\right).
\end{aligned}
$$

解法2：由于X,Y联合概率密度函数关于自变量(x,y)具有一定对称性，所以考虑对称的变量替换

$$
\begin{cases} u &= x+y, \\ v &= x-y, \end{cases}
$$

由此解得

$$
\begin{cases} x &= (u+v)/2, \\ y &= (u-v)/2, \end{cases}
$$

于是得到$U=X+Y$和$V=X-Y$的联合概率密度函数

$$
\begin{aligned}
f_{U,V}(u,v) &= f_{X,Y}\left(\frac{u+v}{2}, \frac{u-v}{2}\right) \frac{1}{\left|\det\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}\right|} \\
&= \frac{1+\frac{u^2-v^2}{4}uv}{8} I_{\left|\frac{u+v}{2}\right|\leq 1, \left|\frac{u-v}{2}\right|\leq 1}.
\end{aligned}
$$

所以，

$$
\begin{aligned}
f_{X+Y}(u) = f_U(u) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_{U,V}(u,v)dv \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1+\frac{u^2-v^2}{4}uv}{8} I_{|u+v|\leq 2, |u-v|\leq 2}dv \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{8} I_{|u+v|\leq 2, |u-v|\leq 2}dv \qquad (\text{利用了积分的对称性}) \\
&= \frac{1}{8}\int_{-\infty}^{+\infty} I_{-2+|u|\leq v\leq 2-|u|}dv \\
&= \frac{2-|u|}{4} I_{|u|\leq 2}.
\end{aligned}
$$

然后，再象解法1中那样求出F_{X+Y}。

解法3：直接计算$X+Y$的概率分布函数

$$\begin{aligned}
F_{X+Y}(z) &= P(X+Y \le z) \\
&= \iint\limits_{x+y\le z} f_{X,Y}(x,y)dxdy \\
&= \iint\limits_{\mathbb{R}^2} \frac{1+xy(x^2-y^2)}{4} I_{|x|\le 1,|y|\le 1,x+y\le z} dxdy \\
&= \frac{1}{4}\iint\limits_{\mathbb{R}^2} I_{|x|\le 1,|y|\le 1,x+y\le z} dxdy + \iint\limits_{\mathbb{R}^2} \frac{xy(x^2-y^2)}{4} I_{|x|\le 1,|y|\le 1,x+y\le z} dxdy \\
&= \frac{1}{4}\iint\limits_{\mathbb{R}^2} I_{|x|\le 1,|y|\le 1,x+y\le z} dxdy \qquad (\text{上式第2个积分关于}(x,y)\mapsto(y,x)\text{具有对称性}) \\
&= I_{-2\le z<0}\frac{(z+2)^2}{8} + I_{0\le z<2}\left(1-\frac{(2-z)^2}{8}\right) + I_{z\ge 2}.
\end{aligned}$$

这与前两个解法求得的F_{X+Y}是相同的。

题3 设X,Y有联合概率密度函数$f(x,y)=cxy$（$0\le x\le y\le 2$）。

1. 计算常数c的值；
2. 分别求出X,Y的边缘概率密度函数；
3. 判断X,Y是否独立；
4. 对$0<y<2$，求在已知$Y=y$的条件下，X的条件概率密度函数，以及条件数学期望$E(X|Y=y)$；
5. 求$EX, EY, \mathrm{Var}(X), \mathrm{Cov}(X,Y), \mathrm{Corr}(X,Y)$。

解：先求Y的边缘概率密度函数

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,y)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} cxyI_{0\le x\le y\le x}dx = I_{0\le y\le 2}\int_0^y cxydx = \frac{cy^3}{2}I_{0\le y\le 2}.$$

再由

$$1=\int_{-\infty}^{+\infty} f_Y(y)dy = \int_0^2 \frac{cy^3}{2}dy = \frac{c\times 2^4}{8}$$

得到$c=1/2$，因此

$$f_{X,Y}=\frac{xy}{2}I_{0\le x\le y\le 2},\qquad f_Y(y)=\frac{y^3}{4}I_{0\le y\le 2}.$$

X的边缘概率密度函数为

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,y)dy \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{xy}{2}I_{0\le x\le y\le 2}dy \\ &= \frac{x}{2}I_{0\le x\le 2}\int_x^2 ydy \\ &= \frac{x}{2}\left(2-\frac{x^2}{2}\right)I_{0\le x\le 2} \\ &= \frac{x(4-x^2)}{4}I_{0\le x\le 2}. \end{aligned}$$

由于$f_{X,Y}(x,y), f_X(x), f_Y(y)$在区域

$$\{(x,y): 0<y<x<2\}$$

上连续，而在此区域上

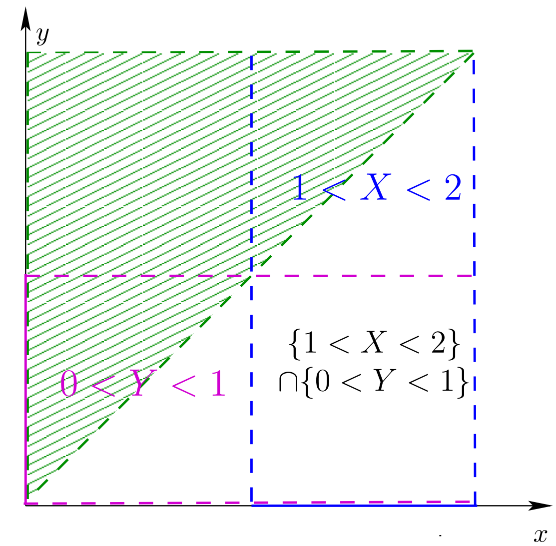
$$f_{X,Y}(x,y)=0<f_X(x)f_Y(y),$$

所以X,Y不独立。

另外，我们也可以通过

$$P(X\in(1,2), Y\in(0,1))=0<P(X\in(1,2))P(Y\in(0,1))$$

来说明X,Y不独立。



根据定义，在已知$Y=y$（$0<y<2$）的条件下，Y的条件概率密度函数为

$$f_{X|Y}(x|y)=\frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)}=\frac{\frac{xy}{2}I_{0\le x\le y\le 2}}{\frac{y^3}{4}}=\frac{2x}{y^2}I_{0\le x\le y},\quad 0<y<2.$$

由此得到条件数学期望

$$E(X|Y=y)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf_{X|Y}(x|y)dy=\int_0^y\frac{2x^2}{y^2}dx=\frac{2y}{3},\quad 0<y<2.$$

用定义可求得

$$EX=\frac{16}{15},\quad EY=\frac{8}{5}.$$

而

$$EX^2=\int_0^2x^2\left(x-\frac{x^3}{4}\right)dx=\frac{4}{3},$$

所以

$$\mathrm{Var}X=EX^2-(EX)^2=\frac{44}{225}.$$

而

$$E(XY)=\iint\limits_{0\le x\le y\le 2}xy\frac{xy}{2}dxdy=\int_0^2\left(\int_0^y\frac{x^2y^2}{2}dx\right)dy=\frac{16}{9}.$$

我们也可以利用全期望公式计算EX、EX^2和$E(XY)$。

利用(4)中的结果，我们得到

$$E(X|Y) = \frac{2}{3}Y,$$

类似可得

$$E(X^2|Y) = \frac{1}{2}Y^2.$$

于是，

$$\begin{aligned}
EX &= E(E(X|Y)) = E\left(\frac{2}{3}Y\right) = \frac{2}{3}EY = \frac{16}{15}, \\
EX^2 &= E(E(X^2|Y)) = E\left(\frac{1}{2}Y^2\right) = \frac{1}{2}EY^2 = \frac{4}{3}, \\
E(XY) &= E(E(XY|Y)) = E(Y \cdot E(X|Y)) = E\left(Y \cdot \frac{2}{3}Y\right) = \frac{2}{3}EY^2 = \frac{16}{9}, \\
\mathrm{Cov}(X,Y) &= E(XY) - EX \cdot EY = \frac{16}{9} - \frac{16}{15} \cdot \frac{8}{5} = \frac{16}{225}, \\
\mathrm{Corr}(X,Y) &= \frac{16/225}{\sqrt{\frac{44}{225} \cdot \frac{24}{225}}} = \frac{4}{\sqrt{66}}.
\end{aligned}$$

注：这是个很基本的题目，也没太多变化。但许多同学一上来就先用联合概率密度函数在全平面的二重积分为1确定c的值，再分别计算两个边缘分布。细心的同学会发现这样就要计算四次积分，而其中有两次几乎是重复的。我们上面给出的做法只要算三次积分。这虽不是什么本质问题，但做好统筹规划提高计算效率也是值得注意的。

题4 设随机变量X与Y有联合概率密度函数$f(x,y) = (1+xy)/4$（$|x| < 1, |y| < 1$）。

1. 分别求X, Y的边缘概率密度函数；
2. 判断X, Y是否独立；
3. 求X^2, Y^2的联合概率密度函数；
4. 判断X^2, Y^2是否独立；

<u>**解**</u>：先求X的边缘概率密度函数

$$
\begin{aligned}
f_X(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,y)dy \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1+xy}{4} I_{|x|<1,|y|<1} dy \\
&= I_{|x|<1} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{4} I_{|y|<1} dy \\
&= \frac{1}{2} I_{|x|<1}.
\end{aligned}
$$

由联合概率密度函数的对称性，Y的边缘概率密度函数为

$$
f_Y(y) = \frac{1}{2} I_{|y|<1}.
$$

由于

$$
f_{X,Y}(x,y) \neq f_X(x) f_Y(y),
$$

所以X, Y不独立。
我们也可以利用

$$
P(X \in (-1,0), Y \in (0,1)) - P(X \in (-1,0)) P(Y \in (0,1)) = \iint\limits_{-1<x<0<y<1} \frac{xy}{4} dxdy < 0
$$

来说明X, Y不独立。
令

$$
U = X^2, \quad V = Y^2.
$$

由于

$$
\{(u,v) : uv = 0\}
$$

是(x,y)平面中的两条直线，所以我们只需在区域

$$
\{(u,v) : u > 0, v > 0\}
$$

中来确定(U,V)的联合概率密度函数，而在这个区域中，每个(u,v)有四个原像

$$
\{(x,y) : x^2 = u, y^2 = v\} = \{(\sqrt{u}, \sqrt{v}), (\sqrt{u}, -\sqrt{v}), (-\sqrt{u}, \sqrt{v}), (-\sqrt{u}, -\sqrt{v})\}.
$$

在每个原像附近，映射$(x,y)\mapsto(x^2,y^2)$有唯一的反函数（表达式由上式右端给出）。在任何一个原像处

$$\left|\frac{\partial u,v}{\partial(x,y)}\right| = \left|\det\begin{pmatrix}2x & 0\\ 0 & 2y\end{pmatrix}\right| = 4|xy| = 4\sqrt{uv} > 0,$$

于是

$$\begin{aligned}
f_{U,V}(u,v) =& \sum_{x^2=u,y^2=v} f_{X,Y}(x,y)\frac{1}{\left|\frac{\partial u,v}{\partial(x,y)}\right|}\\
=& f_{X,Y}(\sqrt{u},\sqrt{v})\frac{1}{4\sqrt{uv}} + f_{X,Y}(\sqrt{u},-\sqrt{v})\frac{1}{4\sqrt{uv}}\\
&\quad + f_{X,Y}(-\sqrt{u},\sqrt{v})\frac{1}{4\sqrt{uv}} + f_{X,Y}(-\sqrt{u},-\sqrt{v})\frac{1}{4\sqrt{uv}}\\
=& \frac{1}{4\sqrt{uv}}I_{0<u<1,0<v<1}\\
=& \frac{1}{2\sqrt{u}}I_{0<u<1}\cdot\frac{1}{2\sqrt{v}}I_{0<v<1}.
\end{aligned}$$

由U,V的联合概率密度函数得到

$$f_U(u) = \frac{1}{2\sqrt{u}}I_{0<u<1}C,$$

其中

$$C = \int_0^1 \frac{1}{2\sqrt{v}}dv.$$

再将$f_U(u)$对u积分，得到

$$1 = C^2,$$

所以$C=1$，于是

$$f_U(u) = \frac{1}{2\sqrt{u}}I_{0<u<1}.$$

同理可得

$$f_V(v) = \frac{1}{2\sqrt{v}}I_{0<v<1}.$$

所以U,V独立。

计算(U,V)的联合概率密度函数的另一个方法是先计算它们的联合概率分布函数

$$
\begin{aligned}
F_{U,V}(u,v) &= P(U\le u, V\le v) = P(X^2\le u, Y^2\le v)\\
&= I_{u\ge 0, v\ge 0} P(-\sqrt{u}\le X\le \sqrt{u}, -\sqrt{v}\le Y\le\sqrt{v})\\
&= I_{u\ge 0, v\ge 0}\int_{-\sqrt{u}}^{\sqrt{u}}\int_{-\sqrt{v}}^{\sqrt{v}}\frac{1+xy}{4} I_{|x|<1,|y|<1}dydx\\
&= I_{u\ge 0, v\ge 0}\int_{\max\{-1,-\sqrt{u}\}}^{\min\{1,\sqrt{u}\}}\int_{\max\{-1,-\sqrt{v}\}}^{\min\{1,\sqrt{v}\}}\frac{1+xy}{4}dydx\\
&= I_{u\ge 0, v\ge 0}\int_{\max\{-1,-\sqrt{u}\}}^{\min\{1,\sqrt{u}\}}\int_{\max\{-1,-\sqrt{v}\}}^{\min\{1,\sqrt{v}\}}\frac{1}{4}dydx \qquad \text{(注意积分区域和被积函数的对称性)}\\
&= I_{u\ge 0, v\ge 0}\int_{0}^{\min\{1,\sqrt{u}\}}\int_{0}^{\min\{1,\sqrt{v}\}}dydx \qquad \text{(注意积分区域和被积函数的对称性)}\\
&= \min\{1,\sqrt{u}\}I_{u\ge 0}\cdot\min\{1,\sqrt{v}\}I_{v\ge 0}\\
&= \begin{cases}
1, & \text{若} u\ge 1 \text{且} v\ge 1\text{；}\\
\sqrt{u}, & \text{若} 0\le u<1 \text{且} v\ge 1\text{；}\\
\sqrt{v}, & \text{若} u\ge 1 \text{且} 0\le v<1\text{；}\\
\sqrt{uv}, & \text{若} 0\le u<1 \text{且} 0\le v<1\text{；}\\
0, & \text{若} u<0 \text{或} v<0\text{。}
\end{cases}
\end{aligned}
$$

由此得到U,V的边缘概率分布函数

$$
\begin{aligned}
F_U(u) &= F_{U,V}(u,+\infty) = \lim_{v\to+\infty}\min\{1,\sqrt{u}\}I_{u\ge 0}\cdot\min\{1,\sqrt{v}\}I_{v\ge 0} = \min\{1,\sqrt{u}\}I_{u\ge 0},\\
F_V(v) &= F_{U,V}(+\infty,v) = \lim_{u\to+\infty}\min\{1,\sqrt{u}\}I_{u\ge 0}\cdot\min\{1,\sqrt{v}\}I_{v\ge 0} = \min\{1,\sqrt{v}\}I_{v\ge 0}.
\end{aligned}
$$

由此得到U,V的边缘概率密度函数

$$
\begin{aligned}
f_U(u) &= \frac{dF_U(u)}{du} = \frac{d}{du}\left(I_{u\ge 1} + I_{0\le u<1}\sqrt{u}\right) = I_{0<u<1}\frac{1}{2\sqrt{u}},\\
f_V(u) &= \frac{dF_V(v)}{dv} = \frac{d}{dv}\left(I_{v\ge 1} + I_{0\le v<1}\sqrt{v}\right) = I_{0<v<1}\frac{1}{2\sqrt{v}},
\end{aligned}
$$

由U,V的联合概率分布函数及边缘概率分布函数知

$$
F_{U,V}(u,v) = F_U(u)F_V(v), \quad \forall u,v,
$$

即U,V独立，故

$$f_{U,V}(u,v)=f_U(u)f_V(v)=\frac{I_{0<u<1,0<v<1}}{4\sqrt{uv}}.$$

题5 袋中装有n个黑球和m个白球，每次从袋中取出一个球，不放回，再取，直到取得白球时停止。记X表示取出的黑球的总数。求X的数学期望。（习题2.4.10是放回的情形）

<u>**解法1a**</u>**:** 先求X的概率分布列，对$k=0,1,2,\ldots,n$，$X=k$即前k次皆得黑球唯第$k+1$次取得白球，于是用乘法公式

$$P(X=k)=\frac{n}{m+n}\cdot\frac{n-1}{m+n-1}\cdots\frac{n-(k-1)}{m+n-(k-1)}\cdot\frac{m}{m+n-k}=\frac{m}{m+n}\cdot\frac{\binom{n}{k}}{\binom{m+n-1}{k}}.$$

于是

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{m}{m+n}\cdot\frac{\binom{n}{k}}{\binom{m+n-1}{k}}=1.$$

从而

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{\binom{n}{k}}{\binom{m+n-1}{k}}=\frac{m+n}{m}. \tag{*}$$

我们计算$n-X$的数学期望

$$\begin{aligned}E(n-X)&=\sum_{k=0}^{n}(n-k)P(X\geq k)=\sum_{k=0}^{n-1}(n-k)\frac{m}{m+n}\cdot\frac{\binom{n}{k}}{\binom{m+n-1}{k}}\\&=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{mn}{m+n}\times\frac{\binom{n-1}{k}}{\binom{m+n-1}{k}}\\&=\frac{mn}{m+n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\binom{n-1}{k}}{\binom{(m+1)+(n-1)-1}{k}}\\&=\frac{mn}{m+n}\times\frac{(m+1)+(n-1)}{m+1}=\frac{mn}{m+1}.\qquad\text{(这里利用了(*)型等式)}\end{aligned}$$

所以，$EX=n-E(n-X)=\frac{n}{m+1}$。

<u>**解法1b**</u>**:** 类似解法1a求得X的分布列以及恒等式(*)。

另外，$X\geq k$即前k次皆得黑球，于是用乘法公式

$$P(X\geq k)=\frac{n}{m+n}\cdot\frac{n-1}{m+n-1}\cdots\frac{n-(k-1)}{m+n-(k-1)}=\frac{\binom{n}{k}}{\binom{m+n}{k}},\quad k=0,1,\ldots,n.$$

而当$k>n$时，$P(X\geq k)=0$。
由于X是取非负整数值的随机变量，所以

$$X=\sum_{k=1}^{\infty} I_{X\geq k},$$

因此

$$EX=\sum_{k=1}^{\infty} E\big[I_{X\geq k}\big]=\sum_{k=1}^{\infty} P(X\geq k).$$

在当前这个问题中，

$$\begin{aligned}EX&=\sum_{k=1}^{\infty} P(X\geq k)=\sum_{k=1}^{n}\frac{\binom{n}{k}}{\binom{m+n}{k}}\\&=\sum_{k=0}^{n}\frac{\binom{n}{k}}{\binom{m+n}{k}}-1=\frac{m+n+1}{m+1}-1=\frac{n}{m+1}.\qquad\text{(这里利用了(*)型等式)}\end{aligned}$$

解法1c[由刘天强、王赟、邢斌、张晨光等同学提供]：与解法1类似求得

$$P(X\geq k)=\frac{n}{m+n}\cdot\frac{n-1}{m+n-1}\cdots\frac{n-(k-1)}{m+n-(k-1)}=\frac{\binom{m+n-k}{m}}{\binom{m+n}{m}},\quad k=0,1,\ldots,n.$$

而当$k>n$时，$P(X\geq k)=0$。由于X是取非负整数值的随机变量，所以

$$\begin{aligned}EX&=\sum_{k=1}^{\infty} P(X\geq k)=\frac{1}{\binom{m+n}{m}}\sum_{k=1}^{n}\binom{m+n-k}{m}\\&=\frac{1}{\binom{m+n}{m}}\left[\binom{m+1}{m+1}+\binom{m+1}{m}+\binom{m+2}{m}+\cdots+\binom{m+n-1}{m}\right]\\&=\frac{1}{\binom{m+n}{m}}\left[\binom{m+2}{m+1}+\binom{m+2}{m}+\cdots+\binom{m+n-1}{m}\right]\\&\ \ \vdots\\&=\frac{1}{\binom{m+n}{m}}\left[\binom{m+n-1}{m+1}+\binom{m+n-1}{m}\right]\\&=\frac{1}{\binom{m+n}{m}}\binom{m+n}{m+1}\\&=\frac{n}{m+1}.\end{aligned}$$

刘天强同学给出的做法本质上是直接利用数学归纳法证明以下组合恒等式

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{m+k}{m}=\binom{m+n+1}{m+1},\quad n=0,1,2,\dots. \tag{*}$$

王赟同学形象地给出了这个组合恒等式在二项式系数的杨辉三角形（西方文献称为Pascal三角形）中的直观意义，利用这个组合恒等式，他还计算了EX^2，从而得到了X的方差。对非负整数取值的随机变量X，

$$\begin{aligned}
EX^2 &= \sum_{k=0}^{\infty}P(X^2>k)\\
&= \sum_{i=0}^{\infty}\sum_{k=i^2}^{(i+1)^2-1}P(X>\sqrt{k})=\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{k=i^2}^{(i+1)^2-1}P(X>i)\\
&= \sum_{i=0}^{\infty}[(i+1)^2-i^2]P(X>i)\\
&= \sum_{k=1}^{\infty}[(2i-1]P(X\ge k)=2\sum_{k=1}^{\infty}kP(X\ge k)-EX,
\end{aligned}$$

而在我们当前的问题中

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n}kP(X\ge k) &= \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{k}P(X\ge k)=\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=j}^{n}P(X\ge k)\\
&= \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=j}^{n}\frac{\binom{m+n-k}{m}}{\binom{m+n}{m}}=\frac{1}{\binom{m+n}{m}}\sum_{j=1}^{n}\binom{m+n-j+1}{m+1}\\
&= \frac{\binom{m+n+1}{m+2}}{\binom{m+n}{m}}=\frac{n(m+n+1)}{(m+1)(m+2)}.
\end{aligned}$$

由此可得方差

$$\mathrm{Var}X=\frac{mn(m+n+1)}{(m+1)^2(m+2)}.$$

解法1d[由同学提供]：首先求得X的概率分布列

$$\begin{aligned}
P(X=k) &= \frac{n}{m+n}\cdot\frac{n-1}{m+n-1}\cdots\frac{n-(k-1)}{m+n-(k-1)}\cdot\frac{m}{m+n-k}\\
&= \frac{\binom{m+n-k-1}{m-1}}{\binom{m+n}{m}},\qquad k=0,1,\dots,n.
\end{aligned}$$

（注：我们从上述概率分布列得到恒等式

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{m+n-k-1}{m-1} = \binom{m+n}{m},$$

即

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{m-1+k}{m-1} = \binom{m+n}{m},$$

也就是解法1c中的等式(*)。）

我们希望按定义计算EX。

$$\begin{aligned} EX &= \sum_{k=0}^{n} kP(X=k) = \sum_{k=0}^{n} kP(X=k) \\ &= \frac{1}{\binom{m+n}{m}} \sum_{k=0}^{n} k\binom{m+n-k-1}{m-1}. \end{aligned}$$

为了计算

$$S = \sum_{k=1}^{n} k\binom{m+n-k-1}{m-1}$$

的值，我们考虑x的多项式

$$A = \sum_{k=0}^{n} k(1+x)^{m+n-k-1}.$$

将这个多项式中的每一项都用Newton二项式展开，再合并同类项，我们发现x^{m-1}的系数正是

$$S = \sum_{k=1}^{n} k\binom{m+n-k-1}{m-1}.$$

下面我们将A改写成其他形式，再来看x^{m-1}的系数。我们考虑

$$\begin{aligned} Ax^2 &= x\left[A(1+x) - A\right] \\ &= x\left[\sum_{k=0}^{n} k(1+x)^{m+n-k} - \sum_{j=0}^{n} j(1+x)^{m+n-j-1}\right] \\ &= x\left[\sum_{k=1}^{n} (1+x)^{m+n-k} - n(1+x)^{m-1}\right] \\ &= (1+x)^{m+n} - (1+x)^m - nx(1+x)^{m-1}. \end{aligned}$$

从而S是多项式Ax^2展开式中x^{m+1}的系数，即

$$S = \binom{m+n}{m+1}.$$

因此

$$EX = \frac{\binom{m+n}{m+1}}{\binom{m+n}{m}} = \frac{n}{m+1}.$$

<u>**解法2**</u>[由赵刚同学提供]：不难发现

$$P(X=k) = P(X \geq k)\frac{m}{m+n-k}, \quad k = 1, \ldots, n.$$

而当$k > n$时，$P(X \geq k) = 0$。由于X是取非负整数值的随机变量，所以

$$\begin{aligned}
EX &= \sum_{k=1}^{\infty} P(X \geq k) = \sum_{k=1}^{n} \frac{m+n-k}{m} P(X=k) \\
&= \frac{m+n}{m} \sum_{k=1}^{n} P(X \geq k) - \frac{1}{m} \sum_{k=1}^{\infty} kP(X=k) \\
&= \frac{m+n}{m}\big[1 - P(X=0)\big] - \frac{1}{m}EX \\
&= \frac{m+n}{m}\left[1 - \frac{m}{m+n}\right] - \frac{1}{m}EX,
\end{aligned}$$

所以，

$$EX = \frac{n}{m} \cdot \frac{m}{m+1} = \frac{n}{m+1}.$$

<u>**解法3**</u>[由付尧生、赵刚、周戈林同学提供]：记$X_{m,n}$为从最初装有m个白球和n个黑球的袋子

里不放回取球至取得白球时取出的黑球总数。记A表示事件“第一次取球得到白球”。

$$
\begin{aligned}
EX_{m,n} &= \sum_{k=0}^{n} kP(X_{m,n}=k) \\
&= \sum_{k=1}^{n} k\big[P(A)P(X_{m,n}=k|A)+P(A^c)P(X_{m,n}=k|A^c)\big] \qquad \text{(全概率公式)} \\
&= P(A)\sum_{k=1}^{n} kP(X_{m,n}=k|A)+P(A^c)\sum_{k=1}^{n} kP(X_{m,n}=k|A^c) \\
&= P(A)\sum_{k=1}^{n} k0+P(A^c)\sum_{k=1}^{n} kP(X_{m,n-1}=k-1) \\
&= P(A^c)\sum_{j=0}^{n-1}(j+1)P(X_{m,n-1}=j) \\
&= P(A^c)E\big[X_{m,n-1}+1\big] \\
&= \frac{n}{m+n}\times[1+EX_{m,n-1}].
\end{aligned}
$$

（在上述推导过程中，实际上我们已经论证了全期望公式

$$EX_{m.n}=P(A)E(X_{m,n}|A)+P(A^c)E(X_{m,n}|A^c),$$

其中$E(X_{m,n}|A)$和$E(X_{m,n}|A^c)$分别是在已知A发生的条件下$X_{m,n}$的条件期望和在已知A^c发生的条件下$X_{m,n}$的条件期望。）

我们知道，如果袋中最初没有黑球，那么第一次必然驱动白球，从而

$$EX_{m,0}=0.$$

将它带入递推关系

$$EX_{m,n}=\frac{n}{m+n}EX_{m,n-1}+\frac{n}{m+n}$$

得到

$$EX_{m,1}=\frac{1}{m+1},$$

再由递推关系得到

$$EX_{m,2}=\frac{2}{m+2}\cdot\frac{1}{m+1}+\frac{2}{m+2}=\frac{2}{m+1}.$$

我们可以用数学归纳法证明，对一切非负整数n，

$$EX_{m,n} = \frac{n}{m+1}.$$

解法4[由王胜茂同学提供]：将所有球依次编号为$1, 2, \ldots, m+n$，其中前n个号码为黑球。考虑将所有球不放回地依次取出，样本空间为$m+n$个号码的所有排列。记A_i为事件“第i号黑球出现在所有白球之前”，$X_i = I_{A_i}$。

由于在不放回取球模型（甚至更一般的Polya坛子模型）中，概率与次序无关，所以，第i号黑球与m个白球的任何一种排列都是等可能的，这样的排列有$(m+1)!$种，而这其中第i号黑球排在所有白球之前的排列共有$m!$种，所以

$$P(A_i) = \frac{m!}{(m+1)!} = \frac{m}{m+1}.$$

因此

$$EX_i = P(A_i) = \frac{1}{m+1}$$

而X就是出现在所有白球前面的黑球总数，即

$$X = X_1 + \cdots + X_n.$$

于是

$$EX = EX_1 + \cdots + EX_n = \frac{n}{m+1}.$$

解法5[由（姓名待查）同学提供]：我们把袋中所有球都依次取出来，得到m个白球和n个黑球的一个排列。在每一个这样的排列中，m个白球把n个黑球分成$m+1$段，记Y_i是第i段黑球的个数。于是

$$n = Y_1 + \cdots + Y_{m+1}.$$

由于在不放回抽样中各种排列是等可能的，所以$Y_1, \ldots, Y_{m+1}$具有相同的概率分布，因此

$$n = EY_1 + \cdots + EY_{m+1} = (m+1)EY_1,$$

于是

$$EY_1 = \frac{n}{m+1}$$

即为所求。

题6 袋中有r种颜色的球，第i种颜色的球有N_i个，$N = N_1 + \cdots + N_r$。现从中一次随机取出n个，记X_i为取出的第i种颜色的球的个数。

1. 求$X_1,\dots,X_r$的联合概率分布列。
2. 设$1\le s<r-1$。求在已知$X_1=x_1,\dots,X_s=x_s$（其中$0\le x_i\le N_i$，$x_1+\cdots+x_s\le n$）的条件下，$X_{s+1},\dots,X_r$的条件概率分布列。

$$P(X_1=x_1,\dots,X_r=x_r)=\frac{\binom{N_1}{x_1}\cdots\binom{N_r}{x_r}}{\binom{N_1+\cdots+N_r}{n}},$$

其中$x_1,\dots,x_r$是非负整数，满足$x_1+\cdots+x_r=n$。

由此得到$X_1,\dots,X_s$的边缘概率分布列

$$\begin{aligned}
P(X_1=x_1,\dots,X_s=x_s)&=\sum_{x_{s+1},\dots x_r\ge 0,x_{s+1}+\cdots+x_r=n-x_1-\cdots-x_s}P(X_1=x_1,\dots,X_r=x_r)\\
&=\sum_{x_{s+1},\dots x_r\ge 0,x_{s+1}+\cdots+x_r=n-x_1-\cdots-x_s}\frac{\binom{N_1}{x_1}\cdots\binom{N_r}{x_r}}{\binom{N_1+\cdots+N_r}{n}}\\
&=\frac{\binom{N_1}{x_1}\cdots\binom{N_s}{x_s}\binom{N_{s+1}+\cdots+N_r}{n-x_1-\dots-x_s}}{\binom{N_1+\cdots+N_r}{n}}\sum_{x_{s+1},\dots x_r\ge 0,x_{s+1}+\cdots+x_r=n-x_1-\cdots-x_s}\frac{\binom{N_{s+1}}{x_{s+1}}\cdots\binom{N_r}{x_r}}{\binom{N_{s+1}+\cdots+N_r}{n-x_1-\cdots-x_s}}\\
&=\frac{\binom{N_1}{x_1}\cdots\binom{N_s}{x_s}\binom{N_{s+1}+\cdots+N_r}{n-x_1-\dots-x_s}}{\binom{N_1+\cdots+N_r}{n}}.
\end{aligned}$$

在已知$X_1=x_1,\dots,X_s=x_s$时，$X_{s+1},\dots,X_r$的条件概率分布列为

$$\begin{aligned}
P(X_{s+1}=x_{s+1},\dots,X_r=x_r)&=\frac{P(X_1=x_1,\dots,X_r=x_r)}{P(X_1=x_1,\dots,X_s=x_s)}\\
&=\frac{\binom{N_{s+1}}{x_{s+1}}\cdots\binom{N_r}{x_r}}{\binom{N_{s+1}+\cdots+N_r}{x_{s+1}+\cdots+x_r}}.
\end{aligned}$$

因此多维超几何分布的边缘分布和条件分布都是（多维）超几何分布。

题7 （Borel悖论）设X,Y服从平面区域

$$D=\{(x,y):0\le y\le 1,0\le x+y\le 1\}$$

上的均匀分布。

1. 求条件数学期望$E(Y|X=0)$的值。
2. 设$U=X/Y$。求条件数学期望$E(Y|U=0)$的值。

解： 1、由X,Y的联合概率密度函数

$$f_{X,Y}(x,y)=I_{0\le y\le 1,0\le x+y\le 1}$$

得到X的边缘概率密度函数

$$\begin{aligned}f_X(x)&=\int_{-\infty}^{+\infty}I_{0\le y\le 1,-x\le y\le 1-x}dy=I_{1\ge -x,1-x\ge 0}\int_{\max\{0,-x\}}^{\min\{1,1-x\}}dy\\&=I_{-1\le x\le 1}\left[\min\{1,1-x\}-\max\{0,-x\}\right]=I_{-1\le x\le 1}\left[1+\min\{0,-x\}+\min\{0,x\}\right]\\&=I_{-1\le x\le 1}\left[1+\min\{0,-x,x\}\right]=I_{-1\le x\le 1}(1-|x|).\end{aligned}$$

$f_X(x)$在$x=0$连续，且$f_X(0)=1$，所以

$$f_{Y|X}(y|0)=\frac{f_{X,Y}(0,y)}{f_X(0)}=I_{0\le y\le 1},$$

因此

$$E(Y|X=0)=\int_0^1 ydy=\frac{1}{2}.$$

2、我们求U,Y的联合概率密度函数

$$f_{U,Y}(u,y)=f_{X,Y}(uy,y)\left|\det\begin{pmatrix}y&u\\0&1\end{pmatrix}\right|=I_{0<y\le 1,0\le uy+y\le 1}|y|=yI_{0<y\le 1,0\le uy+y\le 1},$$

由此，计算U的边缘概率密度函数

$$\begin{aligned}f_U(u)&=I_{1+u\ge 0}\int_{-\infty}^{+\infty}yI_{0<y\le 1,0\le y\le \frac{1}{1+u}}dy=I_{u\ge -1}\int_0^{\min\{1,\frac{1}{1+u}\}}ydy\\&=\frac{1}{2}I_{u\ge -1}\min\left\{1,\frac{1}{(1+u)^2}\right\},\end{aligned}$$

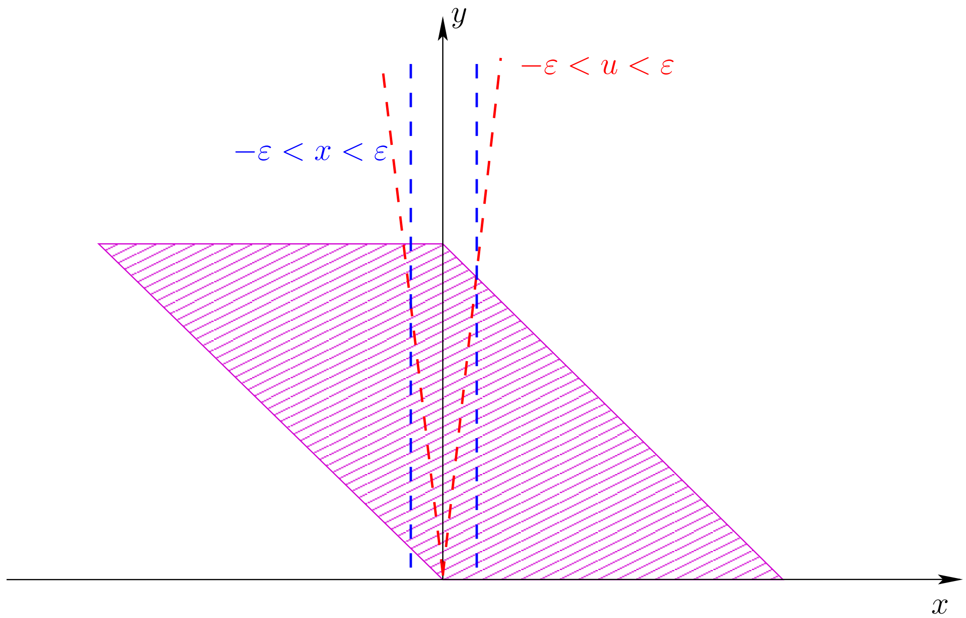
$f_U(u)$在$u=0$连续，且$f_U(0)=\frac{1}{2}$，所以

$$f_{Y|U}(y|0)=\frac{f_{U,Y}(0,y)}{f_U(0)}=2yI_{0\le y\le 1},$$

因此

$$E(Y|U=0)=\int_0^1 y\cdot 2ydy=\frac{2}{3}.$$

虽然事件$\{X = 0\}$和$\{U = 0\}$是同一个事件，但是Y的上述条件数学期望的值却不相等，这个例子被称为Borel悖论。造成这个现象的原因$\{X = 0\}$和$\{U = 0\}$都是零概率事件。对一个零概率事件A，我们用一列正概率事件A_n逼近A，如果条件概率值$P(B|A_n)$的极限$\lim_{n\to\infty} P(B|A_n)$存在，那么我们把这个极限值定义为$P(B|A)$。上面这个例子表明，$P(B|A)$是依赖于$A_n$的选取方式的。下图说明了在$E(Y|X = 0)$和$E(Y|U = 0)$的计算中涉及的不同的取极限的途径。



题4 设$X, Y \overset{i.i.d}{\sim} \mathrm{Exp}(\lambda)$。求

$$Z = \begin{cases} 3X + 1, & 若X \geq Y \\ 6Y, & 若X < Y \end{cases}.$$

的数学期望。（这是教材习题3.5.12。）

解法1： 记

$$\begin{aligned} h(x, y) &= \begin{cases} 3x + 1, & x \geq y \\ 6y, & x < y. \end{cases} \\ &= (3x + 1) \cdot I_{x \geq y} + 6y \cdot I_{x<y} \\ &= (3x + 1) \cdot (1 - I_{x<y}) + 6y \cdot I_{x<y} \\ &= (3x + 1) + (6y - 3x - 1) \cdot I_{x<y}, \end{aligned}$$

所以

$$Z = h(X,Y) = (3X+1) + (6Y-3X-1)\cdot I_{X<Y}.$$

于是

$$\begin{aligned}
E[Z] = E[h(X,Y)] &= \iint\limits_{\mathbb{R}^2} h(x,y) f_{X,Y}(x,y)dxdy \\
&= \int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} \left[(3x+1) + (6y-3x-1)I_{x<y}\right]\lambda e^{-\lambda x}\lambda e^{-\lambda y}dxdy \\
&= \int_0^{+\infty}(3x+1)\lambda e^{-\lambda x}dx\int_0^{+\infty}\lambda e^{-\lambda y}dy + \int_0^{+\infty}\left(\int_x^{+\infty}(6y-3x-1)\lambda e^{-\lambda y}dy\right)\lambda e^{-\lambda x}dx \\
&= \left(\frac{3}{\lambda}+1\right)\cdot 1 + \int_0^{+\infty}\left(\int_x^{+\infty}\left[6(y-x)+3x-1\right]\lambda e^{-\lambda(y-x)}dy\right)\lambda e^{-2\lambda x}dx \\
&= \frac{3}{\lambda}+1+\int_0^{+\infty}\left(\frac{6}{\lambda}+(3x-1)\right)\lambda e^{-2\lambda x}dx = \frac{3}{\lambda}+1+\frac{3}{\lambda}+\frac{3}{4\lambda}-\frac{1}{2} = \frac{27}{4\lambda}+\frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

解法2： 与解法1类似，得到

$$Z = h(X,Y) = (3X+1) + (6Y-3X-1)\cdot I_{X<Y}.$$

我们希望通过全期望公式$EZ = E[E(Z|X)]$来计算Z的数学期望。

$$\begin{aligned}
E[Z|X=x] &= E(h(X,Y)|X=x) = E(h(x,Y)|X=x) \\
&= E(h(x,Y)) \qquad (h(x,Y)\text{是}Y\text{的函数与}X\text{独立}) \\
&= \int_0^{+\infty}\left[(3x+1)+(6y-3x-1)\cdot I_{x<y}\right]\lambda e^{-\lambda y}dy \\
&= 3x+1+e^{-\lambda x}\int_x^{+\infty}\left[6(y-x)+3x-1\right]\lambda e^{-\lambda(y-x)}dy \\
&= 3x+1+e^{-\lambda x}\left(\frac{6}{\lambda}+(3x-1)\right).
\end{aligned}$$

从而

$$\begin{aligned}
EZ = E[E(Z|X)] &= \int_0^{+\infty} E(Z|X=x)\lambda e^{-\lambda x}dx \\
&= \int_0^{+\infty}\left[3x+1+e^{-\lambda x}\left(\frac{6}{\lambda}-1+3x\right)\right]\lambda e^{-\lambda x}dx \\
&= \frac{3}{\lambda}+1+\frac{3}{\lambda}-\frac{1}{2}+\frac{3}{4\lambda} = \frac{27}{4\lambda}+\frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

解法3: 用X,Y的大小关系来划分，这相当于$E[E(Z|I_{X\ge Y})]$，

$$\begin{aligned}EZ &= E(Z|X\ge Y)P(X\ge Y)+E(Z|X<Y)P(X<Y)\\ &= E(3X+1|X\ge Y)P(X\ge Y)+E(6Y|X<Y)P(X<Y)\\ &= \big[3E(X|X\ge Y)+1\big]P(X\ge Y)+6E(Y|X<Y)P(X<Y).\end{aligned}$$

由于X,Y独立同分布，所以X,Y的联合概率密度函数与Y,X的联合概率密度函数相同，因此我们可以对调X,Y的角色，

$$P(X<Y)=P(Y<X)=P(Y\le X),$$

而

$$P(X<Y)+P(X\ge Y)=1,$$

所以$P(X\ge Y)=P(X<Y)=1/2$，另外，

$$E(X|X\ge Y)=E(Y|X<Y),$$

所以

$$EZ=\frac{9}{2}E(X|X\ge Y)+\frac{1}{2}.$$

为计算$E(X|X\ge Y)$，我们先计算在已知$X\ge Y$的条件下，X的条件概率分布函数和条件概率密度函数。

$$\begin{aligned}F_{X|X\ge Y}(x) &= P(X\le x|X\ge Y)\\ &= \frac{P(Y\le X\le x)}{P(X\ge Y)}=2P(Y\le X\le x)\\ &= 2\int_0^x\int_v^x \lambda e^{-\lambda u}\lambda e^{-\lambda v}dudv\\ &= 2\int_0^x \big[e^{-\lambda v}-e^{-\lambda x}\big]\lambda e^{-\lambda v}dv,\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}f_{X|X\ge Y}(x) &= \frac{d}{dx}F_{X|X\ge Y}(x)\\ &= 2\int_0^x \lambda e^{-\lambda x}\lambda e^{-\lambda v}dv = 2\lambda e^{-\lambda x}\left(1-e^{-\lambda x}\right)I_{x>0},\end{aligned}$$

于是

$$E(X|X \geq Y) = \int_0^{+\infty} x \cdot 2\lambda e^{-\lambda x}\left(1 - e^{-\lambda x}\right) dx = \frac{2}{\lambda} - \frac{1}{2\lambda} = \frac{3}{2\lambda},$$

从而

$$EZ = \frac{27}{4\lambda} + \frac{1}{2}.$$

附注：

- 《概率论与数理统计教程》书后答案是错的，《概率论与数理统计教程——习题与解答》中给出的解法也是错的！！！作者错误地认为当X, Y独立时，

  $$EZ = E(3X+1)P(X \geq Y) + E(6Y)P(X < Y),$$

  这对初学的人是个常见的错误，因为他们只关心随机变量Z在某些特定条件下的取值（比如当$X \geq Y$，$Z = 3X+1$），而忽略了随机变量的概率分布受这些特定条件的影响。所以这个错误的解答对初学者更具迷惑性，而且作者还特别指出这个等式“的证明这里略去”，这就更加让学生认为这个“直观的结论”是对的，只不过证明需要费些口舌。
- 在解法3中我们可以更多地利用X, Y的对称性。比如

  $$\begin{aligned} P(Y \leq X \leq x) = P(X \leq Y \leq x) &= \frac{P(X \leq Y \leq x) + P(Y \leq X \leq x)}{2} \\ &= \frac{P(X \leq x, Y \leq x)}{2} \\ &= \frac{\left[P(X \leq x)\right]^2}{2} = \frac{(1-e^{-\lambda x})^2}{2} I_{x>0}, \end{aligned}$$

  所以

  $$F_{X|X \geq Y}(x) = (1-e^{-\lambda x})^2 I_{x>0},$$

  从而得到

  $$f_{X|X \geq Y}(x) = 2\lambda e^{-\lambda x}(1-e^{-\lambda x}) I_{x>0}.$$
- 另外一种利用对称性的方法是

  $$\begin{aligned} EZ &= \frac{9}{2}E(X|X \geq Y) + \frac{1}{2} \\ &= \frac{9}{2}\left[P(X \geq Y)E(X|X \geq Y) + P(X < Y)E(Y|X < Y)\right] + \frac{1}{2} \\ &= \frac{9}{2}E(\max\{X, Y\}) + \frac{1}{2} \\ &= \frac{9}{2}\left[EX + EY - E(\min\{X, Y\})\right] + \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

由于X, Y服从指数分布$\mathrm{Exp}(\lambda)$并且相互独立，所以$\min\{X, Y\}$服从指数分布$\mathrm{Exp}(\lambda+\lambda)$，这可以利用指数分布是唯一具有“无记忆性”的连续分布这一事实得到。所以，

$$EZ = \frac{9}{2}\left[\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda} - \frac{1}{2\lambda}\right] + \frac{1}{2} = \frac{27}{4\lambda} + \frac{1}{2}.$$