概率论与数理统计第二次习题课题目解答

题1 设连续型随机变量X的分布函数为:

$$F(x) = \begin{cases} Ae^x, & x < 0; \\ B, & 0 \le x < 1; \\ 1 - Ae^{-(x-1)}, & x \ge 1. \end{cases}$$

求：(a) A、B的值。(b) X的密度函数。(c) $P(X > 1/3)$的值。(d) X的数学期望和方差。

解：(a) 因为X是连续型随机变量，所以它的概率分布函数处处连续，特别是在$x = 0$和$x = 1$两处，连续性意味着

$$A = \lim_{x \nearrow 0} F(x) = \lim_{x \searrow 0} F(x) = B, \quad B = \lim_{x \nearrow 1} F(x) = \lim_{x \searrow 1} F(x) = 1 - A,$$

由此解得$A = B = 1/2$。

(b) X的概率密度函数为

$$f(x) = F'(x) = Ae^x I_{x<0} + Ae^{-(x-1)} I_{x>1} = \frac{e^x I_{x<0} + e^{-(x-1)} I_{x>1}}{2}$$

(c) 直接利用概率分布函数

$$P(X > 1/3) = 1 - F(1/3) = 1 - B = 0.5.$$

或者利用概率密度函数

$$\begin{aligned} P(X > 1/3) &= \int_{1/3}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{e^x I_{x<0} + e^{-(x-1)} I_{x>1}}{2}\right] \times I_{x>1/3} dx \\ &= \frac{1}{2} \int_1^{+\infty} e^{-(x-1)} dx = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} e^{-y} dy = 0.5. \end{aligned}$$

(d)

$$
\begin{aligned}
EX &= \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} x\left[\frac{e^x I_{x<0} + e^{-(x-1)} I_{x>1}}{2}\right] dx \\
&= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{0} xe^x dx + \frac{1}{2}\int_{1}^{+\infty} xe^{-(x-1)} dx \\
&= -\frac{1}{2}\int_{0}^{+\infty} ye^{-y} dy + \frac{1}{2}\int_{0}^{+\infty} (y+1)e^{-y} dy \\
&= -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\times 2 = \frac{1}{2}.
\end{aligned}
$$

类似地，可以计算EX^2，但是我们注意到X的概率密度函数关于$x = 0.5$对称，即

$$
f(0.5 - x) = f(0.5 + x), \quad \forall x,
$$

所以

$$
\begin{aligned}
EX^2 &= \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} (y+0.5)^2 f(y+0.5)dy \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \left[y^2 + y + \frac{1}{4}\right] f(y+0.5)dy \\
&= 2\int_{0}^{+\infty} \left[y^2 + \frac{1}{4}\right] \frac{e^{y+0.5} I_{y<-0.5} + e^{0.5-y} I_{y>0.5}}{2} dy \\
&= \int_{0.5}^{+\infty} \left[y^2 + \frac{1}{4}\right] e^{0.5-y} dy \\
&= \int_{0}^{+\infty} \left[(u+0.5)^2 + \frac{1}{4}\right] e^{-u} du \\
&= \int_{0}^{+\infty} \left[u^2 + u + \frac{1}{2}\right] e^{-u} du \\
&= -u^2 e^{-u}\Big|_0^{+\infty} + 2\int_{0}^{+\infty} ue^{-u} du + 1 + 0.5 \\
&= 2 + 1 + 0.5 = \frac{7}{2}.
\end{aligned}
$$

从而

$$\mathrm{Var}X = EX^2 - (EX)^2 = \frac{7}{2} - \frac{1}{4} = \frac{13}{4}.$$

(d)的另一种解法

$$\begin{aligned}
EX &= \int_0^{+\infty} P(X > x))dx - \int_{-\infty}^{0} P(X < x)dx \\
&= \int_1^{+\infty} \frac{1}{2} e^{-(x-1)} dx + \int_0^1 \frac{1}{2} dx - \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{2} e^x dx \\
&= \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{2} e^u du + \frac{1}{2} - \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{2} e^x dx \\
&= \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

另外，

$$\begin{aligned}
EX^2 &= \int_0^{+\infty} P(X^2 > x)dx \\
&= \int_0^{+\infty} P(X^2 > u^2)du^2 \\
&= 2\int_0^{+\infty} u\left[P(X > u) + P(X < -u)\right] du \\
&= 2\int_0^{+\infty} u\left[\frac{e^{-(u-1)} I_{u>1}}{2} + \frac{I_{0<u<1}}{2} + \frac{e^{-u}}{2}\right] du \\
&= \int_1^{+\infty} ue^{-(u-1)} du + \int_0^1 udu + \int_0^{+\infty} ue^{-u} du \\
&= \int_0^{+\infty} (v+1)e^{-v} dv + \int_0^1 udu + \int_0^{+\infty} ue^{-u} du \\
&= 2 + \frac{1}{2} + 1 = \frac{7}{2}
\end{aligned}$$

从而

$$\mathrm{Var}X = EX^2 - (EX)^2 = \frac{7}{2} - \frac{1}{4} = \frac{13}{4}.$$

题2 设随机变量X服从$(-\pi/2, \pi/2)$上的均匀分布。

求：(a) 随机变量$Y = \cos X$的概率密度函数。(b) Y的数学期望和方差。

解：(a) 先求Y的概率分布函数，

$$
\begin{aligned}
F_Y(y) &= P(Y \le y) = P(\cos X \le y) \\
&= I_{y\ge 1} + I_{0\le y<1}\left[P\left(-\frac{\pi}{2} < X \le -\arccos y\right) + P\left(\arccos y \le X < \frac{\pi}{2}\right)\right] \\
&= I_{y\ge 1} + I_{0\le y<1}\frac{\left[-\arccos y + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} - \arccos y\right]}{\pi} \\
&= I_{y\ge 1} + I_{0\le y<1}\frac{\pi - 2\arccos y}{\pi}.
\end{aligned}
$$

由此解得Y的概率密度函数

$$
f_Y(y) = F_Y'(y) = \frac{2}{\pi\sqrt{1-y^2}} I_{0\le y<1}.
$$

(a)的另解。直接利用随机变量函数的概率密度公式

$$
\begin{aligned}
f_Y(y) &= \sum_{x:cosx=y} f_X(x)\frac{1}{|\frac{dy}{dx}|} \\
&= f_X(-\arccos y)\frac{1}{|(\cos x)'|_{x=-\arccos y}} + f_X(\arccos y)\frac{1}{|(\cos x)'|_{x=\arccos y}} \\
&= 2\frac{1}{\pi} I_{-\frac{\pi}{2}<\arccos y<\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-\cos^2 x}\big|_{x=-\arccos y}} \\
&= \frac{2}{\pi\sqrt{1-y^2}} I_{0<y<1}.
\end{aligned}
$$

(b)

$$
EY = \int_{-\infty}^{+\infty} y f_Y(y) = \int_0^1 y\frac{2}{\pi\sqrt{1-y^2}}dy = -\frac{2}{\pi}\int_0^1 d\sqrt{1-y^2} = \frac{2}{\pi}.
$$

或者利用随机变量函数的数学期望公式

$$
EY = \int_{-\infty}^{+\infty} \cos x \cdot f_X(x)dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\sin x}{\pi} = \frac{2}{\pi}.
$$

$$
EY^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \cos^2 x \cdot f_X(x)dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(2x)+1}{2\pi}dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2\pi}dx = \frac{1}{2}.
$$

从而

$$\text{Var}Y = EY^2 - (EY)^2 = \frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2} = \frac{\pi^2 - 8}{2\pi^2} \approx 0.095.$$

注：初学者应该养成一个良好的习惯，就是在计算概率分布函数或概率密度函数时，注意通过示性函数或其他形式强调自变量的取值范围。比如这个问题中，Y的概率密度函数的表达式$\frac{2}{\pi\sqrt{1-y^2}}$的自然定义域为$-1 < y < 1$，而实际上作为概率密度函数，它的适用范围只是$0 < y < 1$。如果不注意这个区别，那么在利用$Y$的密度计算$EY$或$Y$的各种矩时，就会发生错误。

题3 设随机变量U服从$[0,1]$上的均匀分布，函数$F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 满足以下三个条件

1. 对任何$x \in \mathbb{R}$，$F(-\infty) = 0 \le F(x) \le 1 = F(+\infty)$；
2. F单调不减；
3. F在所有$x \in \mathbb{R}$处都是右连续的。

证明：

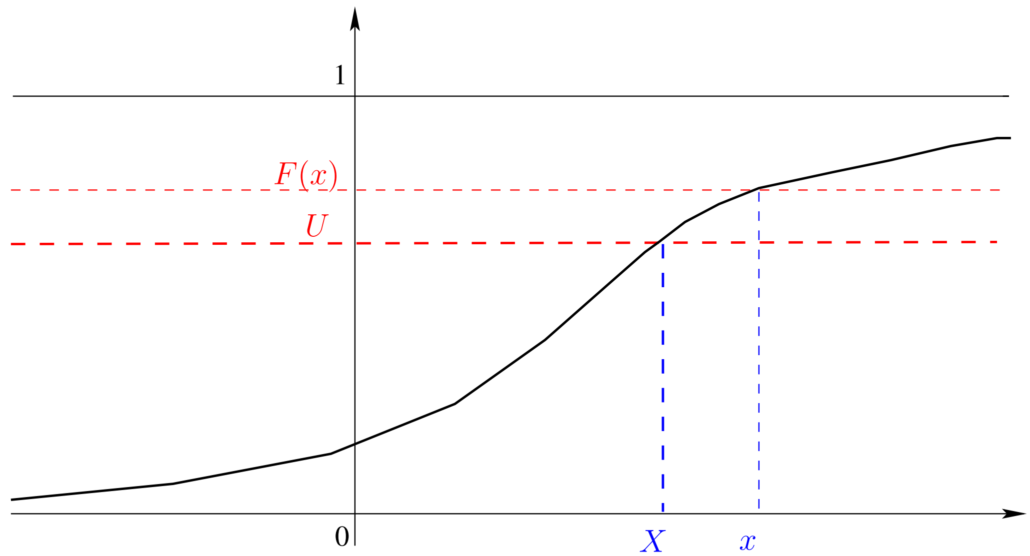
1. 如果F连续且严格单调增，则随机变量$X = F^{-1}(U)$的概率分布函数就是F；
2. 一般情况下，即F不严格单调增或在某些x处不连续时，随机变量

$$X = \inf\{x \in \mathbb{R} | F(x) \ge U\}$$

的概率分布函数就是F 。

证明：1、因F严格单调增且连续，故F^{-1}在$(0,1)$上处处有定义且严格单调增，于是对$X = F^{-1}(U)$，

$$F_X(x) = P(X \le x) = P(F^{-1}(U) \le x) = P(U \le F(x)) = F(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$



2、让我们先回顾一下上面这个证明。实际上，我们从$X = F^{-1}(U)$得到

$$\{\omega \in \Omega : X(\omega) \le x\} = \{\omega \in \Omega : U(\omega) \le F(x)\}, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

而这等价于

$$\{(x,\omega) | X(\omega) \le x\} = \{(x,\omega) | U(\omega) \le F(x)\},$$

这等价于

$$\{x \in \mathbb{R} : X(\omega) \le x\} = \{x \in \mathbb{R} : U(\omega) \le F(x)\}, \qquad \forall \omega \in \Omega.$$

而上式左端是区间$[X(\omega), +\infty)$，因此由上式可得

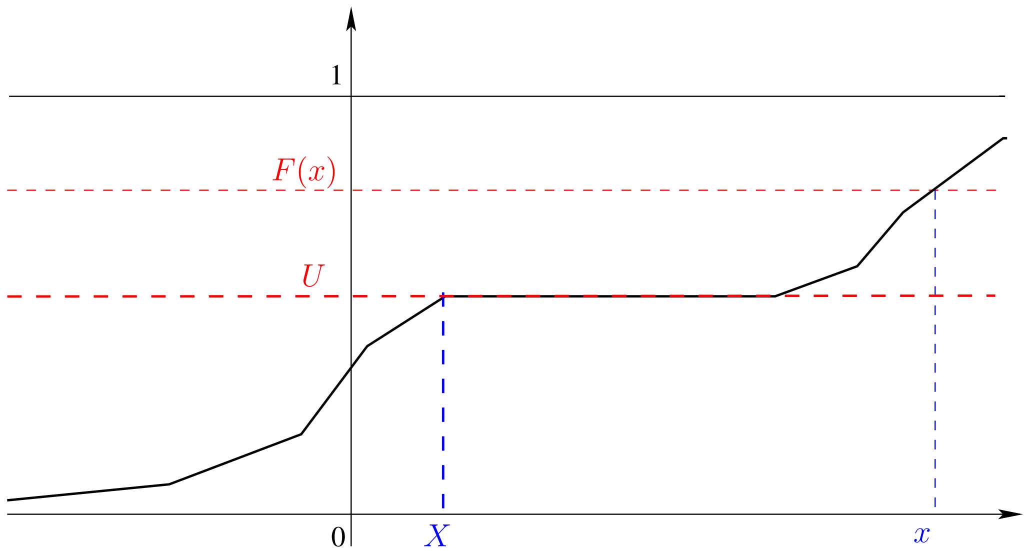
$$X(\omega) = \min\{x \in \mathbb{R} : X(\omega) \le x\} = \min\{x \in \mathbb{R} : U(\omega) \le F(x)\}.$$

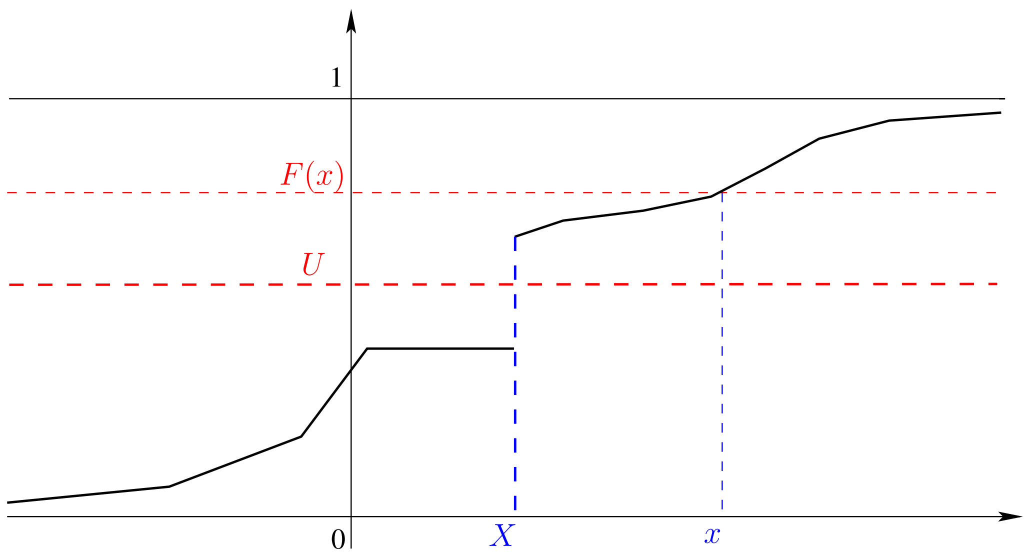
但我们事先并不知道$\{x \in \mathbb{R} : U(\omega) \le F(x)\}$是否有最小值，所以我们定义

$$X(\omega) = \inf\{x \in \mathbb{R} : U(\omega) \le F(x)\}.$$

这里inf表示“下确界”，即一个实数集合的所有下界中的最大下界。

现在我们已经知道了X的表达式的来历，让我们来证明对任意$\omega \in \Omega$，集合$\{x \in \mathbb{R} : U(\omega) \le F(x)\}$ 就是区间$[X(\omega), +\infty)$，这样就有$F_X = F$。





记

$$A = \{\omega \in \Omega | 0 < U(\omega) < 1\}.$$

则$P(A^c) = P(U = 1) + P(U = 0) = 0$，所以$P(A) = 1$。

对$\omega \in A$（即$0 < U(\omega) < 1$），由于$F(+\infty) = 1$，所以$\{x \in \mathbb{R} : U(\omega) \leq F(x)\}$非空；又因$F(-\infty) = 0$，故$\{x \in \mathbb{R} : U(\omega) \leq F(x)\}$有下界。

因此我们可以定义

$$X(\omega)=\begin{cases}\inf\{x\in\mathbb{R}:U(\omega)\le F(x)\}, & \omega\in A;\\ 0, & \omega\in A^c.\end{cases}$$

以下设$\omega\in A$。由X的定义，我们知道

$$\{x\in\mathbb{R}:U(\omega)\le F(x)\}\subset[X(\omega),+\infty).$$

所以，我们只需证明

$$[X(\omega),+\infty)\subset\{x\in\mathbb{R}:U(\omega)\le F(x)\}.$$

首先，如果$t>X(\omega)$，那么t不是$\{x\in\mathbb{R}:U(\omega)\le F(x)\}$的下界（因为$X(\omega)$已经是最大的下界），所以存在$x\in\mathbb{R}$满足

$$X(\omega)\le x<t,\quad U(\omega)\le F(x).$$

于是，由F单调不减，我们知道

$$U(\omega)\le F(x)\le F(t).$$

因此$t\in\{x\in\mathbb{R}:U(\omega)\le F(x)\}$，于是我们证明了

$$(X(\omega),+\infty)\subset\{x\in\mathbb{R}:U(\omega)\le F(x)\}.$$

因为F右连续，所以

$$U(\omega)\le\lim_{x\searrow X(\omega)}F(x)=F(X(\omega)),$$

因此$X(\omega)\in\{x\in\mathbb{R}:U(\omega)\le F(x)\}$。所以

$$[X(\omega),+\infty)=\{x\in\mathbb{R}:U(\omega)\le F(x)\}.$$

因此，对任何$x\in\mathbb{R}$，

$$\begin{aligned}F_X(x)&=P(X\le x)=P(A\cap\{X\le x\})+P(A^c\cap\{X\le x\})\\&=P(A\cap\{X\le x\})\\&=P(A\cap\{U\le F(x)\})\\&=P(A\cap\{U\le F(x)\})+P(A^c\cap\{U\le F(x)\})\\&=P(U\le F(x))=F(x).\end{aligned}$$

证毕。

注：这个题目的背景是随机模拟中构造特定分布的随机数的逆图像方法。常见的计算机软件中通常都会给出在一定范围里近似均匀分布的“伪随机数”，通过适当的规范化，我们认为计算机给出的伪随机数是服从$(0,1)$上的均匀分布的，如何利用这样的伪随机数给出服从指定概率分布的随机数，就是随机模拟中的一个基本问题。根据上述问题的答案，我们可以利用均匀分布的随机数U的值，去找这个特定概率分布的下侧U-分位数X，这个X即服从指定的分布。

举例而言，我们知道指数分布$\mathrm{Exp}(\lambda)$的分布函数为

$$F(x) = (1 - e^{-\lambda x}) I_{x \geq 0},$$

于是对$0 < p < 1$，由

$$F(x) = p$$

解得下侧p-分位数为

$$x = \frac{-\ln(1-p)}{\lambda},$$

于是

$$X = \frac{-\ln(1-U)}{\lambda}$$

就是服从这个指数分布的随机变量。

再举一例。我们知道几何分布$\mathrm{Geo}(p)$的分布函数为

$$F(x) = I_{x \geq 1} \sum_{k=1}^{[x]} p(1-p)^{k-1} = I_{x \geq 1} \left(1 - (1-p)^{[x]}\right),$$

这个分布函数不是严格增的，对$0 < u < 1$，这个几何分布的下侧u-分位数是满足不等式

$$I_{x \geq 1} \left(1 - (1-p)^{[x]}\right) \geq u,$$

的最小的x值，因此$x \geq 1$且

$$[x] \ln(1-p) \leq \ln(1-u),$$

即

$$[x] \geq \frac{\ln(1-u)}{\ln(1-p)}.$$

对$u \notin \{1 - (1-p)^k : k = 0, 1, 2, \ldots,\}$，$\frac{\ln(1-u)}{\ln(1-p)}$不是整数，所以

$$[x] > \frac{\ln(1-u)}{\ln(1-p)}.$$

因此最小的x值为

$$\left[\frac{\ln(1-u)}{\ln(1-p)}\right]+1.$$

因此

$$X=\left[\frac{\ln(1-U)}{\ln(1-p)}\right]+1$$

给出一个服从这个几何分布的随机变量。

题4 袋中装有N个球，其中白球数为随机变量，设为X，已知$EX=n$（n可以不是整数）。证明从该袋中摸出一球为白球的概率是n/N。并用这个结论解决第1次习题第3题。

证明：记B（取“白”字的汉语拼音的首个字母）为事件“从袋中随机取出一个球是白球”。在已知袋中有k个白球的情况下，

$$P(B|X=k)=\frac{k}{N}.$$

从由全概率公式，

$$P(B)=\sum_{k\geq 0}P(X=k)P(B|X=k)=\sum_{k\geq 0}P(X=k)\frac{k}{N}=\frac{EX}{N}.$$

证毕。

下面我们求解第1次习题课第3题，即从装有a个黑球，b个白球的袋中每次取出一个球，每次把取出的球换成一个黑球并其放回。记H_k表示事件“第k次取出的是黑球”。我们想求$P(H_k)$的值。

解：设X_k为第k次取球前袋中的黑球数。则

$$P(H_k)=\frac{EX_k}{a+b}. \tag{*}$$

而

$$X_k=X_{k-1}+I_{H_{k-1}^c}=\begin{cases}X_k, & \text{若第}k\text{次取出了黑球；}\\ X_k+1, & \text{若第}k\text{次取出了白球。}\end{cases}$$

于是

$$EX_k=EX_{k-1}+EI_{H_{k-1}}=EX_k+P(H_{k-1}^c)=EX_k+\left(1-\frac{EX_{k-1}}{a+b}\right).$$

这样就得到了EX_k的递推关系，再利用初始条件$EX_1=a$，就可以得到EX_k的值，进而利用(*)得到所求的概率。

题5 若一个离散型随机变量X在某个点上的概率达到最大，则称该点为“众数”(mode)。分别求二项分布、泊松分布和负二项分布的众数。

解：设X服从二项分布$B(n,p)$，则

$$P(X=k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k},\quad k=0,1,\ldots,n.$$

我们比较相邻两项的概率值的大小，因为它们都是乘积的形式，所以我们比较它们的比值与1孰大孰小，

$$\frac{P(X=k)}{P(X=k-1)}-1=\frac{(n-k+1)p}{k(1-p)}-1=\frac{(n+1)p-k}{k(1-p)}.$$

因此当且仅当

$$k<(n+1)p$$

时，$P(X=k)>P(X=k-1)$。同理可证，当且仅当

$$k>(n+1)p-1$$

时，$P(X=k)>P(X=k+1)$。

如果$(n+1)p$不是整数，那么它的整数部分$[(n+1)p]$（即不大于$(n+1)p$的最大整数）是区间$\big[(n+1)p-1,(n+1)p\big]$中的唯一整数，它就是二项分布$B(n,p)$的众数。

如果$(n+1)p$是整数，则分布列在截至$(n+1)p-1$时都是严格增，从$(n+1)p$以后变成严格减，而

$$P(X=(n+1)p)=P(X=(n+1)p-1),$$

所以，这时二项分布$B(n,p)$有两个众数：$(n+1)p-1$和$(n+1)p$。

注意，二项分布的众数与它的数学期望np在数值上不同，但只是稍有区别。

类似讨论Poisson分布和负二项分布。这些分布都是所谓“单峰”分布，即分布列$P(X=k)$随着k增大先增大后减少。

注：对离散分布而言，众数体现了一个随机变量在所有可能的取值中最可能取到的那个值。一个分布可以只有一个众数，也可以有多个众数（比如离散的均匀分布，每个以正概率取到的值都是众数）。对连续型分布而言，也可以类似地用概率密度函数的最大值点来定义众数，比如一维正态分布的众数就是它的密度函数的对称轴的位置，也就是它的数学期望。但众数可以不等于数学期望，比如对指数分布$\mathrm{Exp}(\lambda)$而言，它的众数是$x=0$，而指数分布的期望为$1/\lambda$。而第1题中那个分布就有两个众数$x=0$和$x=1$。

题6 求实数c使$E|X-c|$达到最小。

解：我们先考虑一种很特殊的情形，X有概率密度函数$f(x)$，并且$f(x)$处处连续。

$$h(c):=E|X-c|=\int_{-\infty}^{+\infty}|x-c|f(x)dx=\int_{c}^{+\infty}(x-c)f(x)dx+\int_{-\infty}^{c}(c-x)f(x)dx.$$

于是h关于c可微，

$$\begin{aligned}h'(c)&=\frac{d}{dc}\left(\int_{c}^{+\infty}(x-c)f(x)dx\right)+\frac{d}{dc}\left(\int_{-\infty}^{c}(c-x)f(x)dx\right)\\&=-(c-c)f(c)-\int_{c}^{+\infty}f(x)dx+(c-c)f(c)+\int_{-\infty}^{c}f(x)dx\\&=F(c)-\big[1-F(c)\big]=2F(c)-1.\end{aligned}$$

所以，在区间$I_1:=\{c:F(c)<1/2\}$上，$h'(c)<0$，h严格减，在区间$I_3:=\{c:F(c)>1/2\}$上，$h'(c)>0$，h严格增，在区间

$$I_2:=\{c:F(c)=1/2\}$$

上，h为常数，所以区间I_2中的点都是h的最小值点。当区间I_2是单点集时，这个唯一的c值恰是X的中位数。

下面我们考虑一般情形。这时，

$$\begin{aligned}h(c):=E|X-c|&=\int_{0}^{+\infty}P(|X-c|>x)dx\\&=\int_{0}^{+\infty}P(X>c+x)dx+\int_{0}^{+\infty}P(X<c-x)dx\\&=\int_{c}^{+\infty}P(X>x)dx+\int_{-\infty}^{c}P(X<x)dx.\end{aligned}$$

所以，对$c_1<c_2$，

$$h(c_2)-h(c_1)=\int_{c_1}^{c_2}P(X<x)dx-\int_{c_1}^{c_2}P(X>x)dx,$$

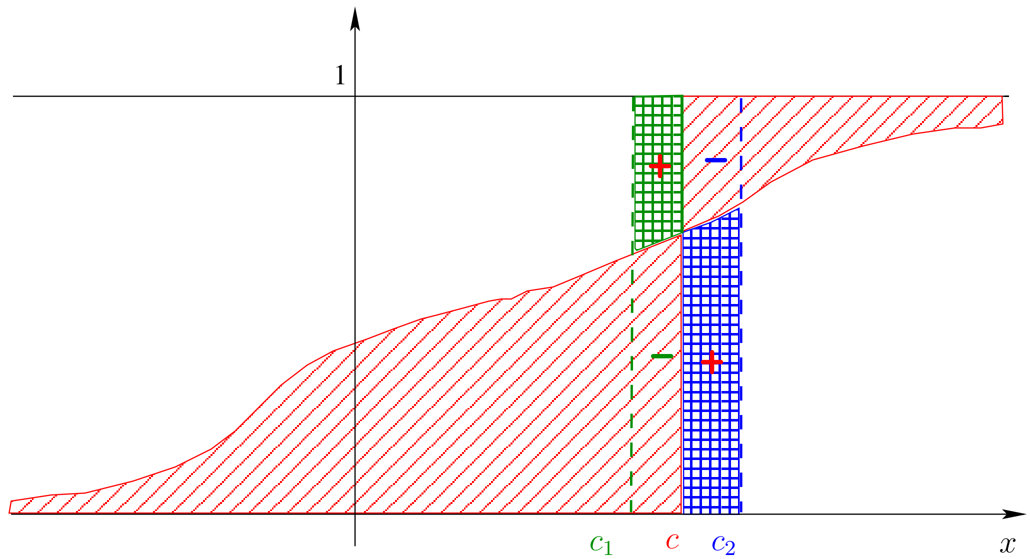
于是

$$\big[P(X<c_1)-P(X>c_1)\big](c_2-c_1)\le h(c_2)-h(c_1)\le\big[P(X<c_2)-P(X>c_2)\big](c_2-c_1).$$

如果$F(c_2) < \frac{1}{2}$，则
$$P(X < c_2) - P(X > c_2) \leq 2F(c_2) - 1 < 0.$$
如果$P(X < c_1) > \frac{1}{2}$，则
$$P(X < c_1) - P(X > c_1) = P(X < c_1) - 1 + P(X \leq c_1) \geq 2P(X < c_1) - 1 > 0.$$
于是h在区间
$$I_1 := \left\{ c \in \mathbb{R} : F(c) < \frac{1}{2} \right\}$$
上严格减（由分布函数的性质，我们知道I_1是形如$(c^*, +\infty)$的开区间），在区间
$$I_3 := \left\{ c \in \mathbb{R} : P(X < c) > \frac{1}{2} \right\}$$
上严格增（由函数$c \mapsto P(X < c)$的性质，我们知道I_3是形如$(-\infty, c_*)$的开区间）。如果$c_1 < c_2$是区间
$$I_2 := \left\{ c \in \mathbb{R} : P(X < c) \leq \frac{1}{2} \leq F(c) \right\} = [c_*, c^*]$$
中的两个点，则
$$\frac{1}{2} \leq F(c_1) = P(X \leq c_1) \leq P(X < c_2) \leq \frac{1}{2},$$
所以
$$F(c) = P(X < c) = \frac{1}{2}, \quad \forall c \in I_2,$$
于是对任意$c_1, c_2 \in I_2, c_1 < c_2$，
$$0 = \big[P(X < c_1) - P(X > c_1)\big](c_2 - c_1) \leq h(c_2) - h(c_1) \leq \big[P(X < c_2) - P(X > c_2)\big](c_2 - c_1) = 0, \quad \forall.$$
即h在区间I_2上为常值。这个常值就是h的最小值。

当I_2是单点集时，这个唯一的c值恰是X的中位数。

注：在分布函数的图像中把
$$h(c) = \int_c^{+\infty} P(X > x)dx + \int_{-\infty}^{c} P(X < x)dx.$$
解释成某些特定区域（直线$x = c$左侧、分布函数图像以下、$y = 0$以上的区域及直线$x = c$右侧、分布函数图像以上、$y = 1$以下的区域，即下图中红色阴影区域）的面积，你可以更直观地理解上述一般情形的证明（比如让直线$x = c$从左向右移动，在下图所示的情形中，直线$x = c$向左移动会使面积减小，而向右移动会使面积增大）。


1
c_1
c
c_2
x