概率论与数理统计第四次习题课题目

题1 设$(X_1,X_2,\ldots,X_r)$服从多项分布$M(n,p_1,p_2,\ldots,p_r)$（$p_i>0,i=1,\ldots,r$且$p_1+\cdots+p_r=1$）。求X_i与X_j的相关系数，$i,j=1,\ldots,r$。

题2 设(X,Λ)的概率分布为：Λ的边缘分布密度为$\frac{1}{\lambda^2}e^{-\beta/\lambda}$，$\lambda>0$，其中$\beta$为正常数；给定$\Lambda=\lambda$时，$X$服从期望为$\frac{1}{\lambda}$的指数分布。求$EX$。

题3 设$X,Y\overset{i.i.d}{\sim}\mathrm{Exp}(\lambda)$。求

$$Z=\begin{cases}3X+1, & \text{若}X\geq Y\\ 6Y, & \text{若}X<Y\end{cases}.$$

的数学期望。（这是教材习题3.5.12。）

题4 投掷一个公平的硬币，及正面为H、反面为T，

1. 直至首次出现HH时停止，请计算投掷次数的期望与方差；
2. 如果停止准则变为首次出现HT，此时投掷次数的期望和方差分别是多少；
3. 假设甲、乙进行一场比赛，投掷硬币直至首次出现HH或HT停止。如果以HH结束，则甲胜，HT结束为乙胜，请问甲、乙的获胜概率。

题5 将编号为 1 至 n 的 n 个球随机投入编号为 1 至 n 的 n 个盒子中，并限制每一个盒子中只能放入一个球，设球与盒子的号码一致的个数为 S_n ，求证：

$$\frac{S_n-ES_n}{n}\xrightarrow{P}0,\quad n\to\infty.$$

题6 一报贩发现每个路过他的报摊的行人向他买报的概率为 $\frac{1}{3}$ 。求在他出售了 100 份报纸时的过路人的数目在 280 人到 320 人之间的概率。（用两种不同的估计方法，并比较它们的优劣）