概率论与数理统计第二次习题课题目

题1 设连续型随机变量X的分布函数为:

$$F(x) = \begin{cases} Ae^x, & x < 0; \\ B, & 0 \le x < 1; \\ 1 - Ae^{-(x-1)}, & x \ge 1. \end{cases}$$

求：(a) A、B的值。(b) X的密度函数。(c) $P(X > 1/3)$的值。(d) X的数学期望和方差。

题2 设随机变量X服从$(-\pi/2, \pi/2)$上的均匀分布。
求：(a) 随机变量$Y = \cos X$的概率密度函数。(b) Y的数学期望和方差。

题3 设随机变量U服从$[0,1]$上的均匀分布，函数$F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 满足以下三个条件

1. 对任何$x \in \mathbb{R}$，$F(-\infty) = 0 \le F(x) \le 1 = F(+\infty)$；
2. F单调不减；
3. F在所有$x \in \mathbb{R}$处都是右连续的。

证明：

1. 如果F连续且严格单调增，则随机变量$X = F^{-1}(U)$的概率分布函数就是F；
2. 一般情况下，即F不严格单调增或在某些x处不连续时，随机变量

$$X = \inf\{x \in \mathbb{R} | F(x) \ge U\}$$

的概率分布函数就是F 。

题4 袋中装有N个球，其中白球数为随机变量，设为X，已知$EX = n$（n可以不是整数）。证明从该袋中摸出一球为白球的概率是n/N。并用这个结论解决习题1.4.26。

题5 若一个离散型随机变量X在某个点上的概率达到最大，则称该点为“众数”(mode)。分别求二项分布、泊松分布和负二项分布的众数。

题6 求实数c使$E|X - c|$达到最小。一般地，对$0 < p < 1$，求实数c使得

$$E\big[p \max\{X - c, 0\} - (1 - p) \min\{X - c, 0\}\big]$$

达到最小。

题7 设随机变量X服从参数为λ的泊松分布，试导出X的k阶原点矩的递推公式，并由此求出X的二阶、三阶、四阶原点矩及中心矩。

概率论与数理统计第二次习题课题目解答

题 1 设连续型随机变量 X 的分布函数为:

$$F(x)=\begin{cases}Ae^x, & x<0;\\ B, & 0\le x<1;\\ 1-Ae^{-(x-1)}, & x\ge 1.\end{cases}$$

求：(a) A、B 的值。(b) X 的密度函数。(c) $P(X>1/3)$ 的值。(d) X 的数学期望和方差。

解: (a) 因为 X 是连续型随机变量，所以它的概率分布函数处处连续，特别是在 $x=0$ 和 $x=1$ 两处，连续性意味着

$$A=\lim_{x\nearrow 0}F(x)=\lim_{x\searrow 0}F(x)=B,\quad B=\lim_{x\nearrow 1}F(x)=\lim_{x\searrow 1}F(x)=1-A,$$

由此解得 $A=B=1/2$。

(b) X 的概率密度函数为

$$f(x)=F'(x)=Ae^xI_{x<0}+Ae^{-(x-1)}I_{x>1}=\frac{e^xI_{x<0}+e^{-(x-1)}I_{x>1}}{2}$$

(c) 直接利用概率分布函数

$$P(X>1/3)=1-F(1/3)=1-B=0.5.$$

或者利用概率密度函数

$$\begin{aligned}P(X>1/3)&=\int_{1/3}^{+\infty}f(x)dx=\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\frac{e^xI_{x<0}+e^{-(x-1)}I_{x>1}}{2}\right]\times I_{x>1/3}dx\\&=\frac{1}{2}\int_1^{+\infty}e^{-(x-1)}dx=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}e^{-y}dy=0.5.\end{aligned}$$

(d)

$$\begin{aligned}EX&=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx\\&=\int_{-\infty}^{+\infty}x\left[\frac{e^xI_{x<0}+e^{-(x-1)}I_{x>1}}{2}\right]dx\\&=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{0}xe^xdx+\frac{1}{2}\int_1^{+\infty}xe^{-(x-1)}dx\\&=-\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}ye^{-y}dy+\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}(y+1)e^{-y}dy\\&=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times 2=\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

类似地，可以计算 EX^2，但是我们注意到 X 的概率密度函数关于 $x=0.5$ 对称，即

$$f(0.5-x)=f(0.5+x),\quad \forall x,$$

所以

$$
\begin{aligned}
EX^2 &= \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} (y+0.5)^2 f(y+0.5)dy \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \left[y^2 + y + \frac{1}{4}\right] f(y+0.5)dy \\
&= 2\int_{0}^{+\infty} \left[y^2 + \frac{1}{4}\right] \frac{e^{y+0.5} I_{y<-0.5} + e^{0.5-y} I_{y>0.5}}{2} dy \\
&= \int_{0.5}^{+\infty} \left[y^2 + \frac{1}{4}\right] e^{0.5-y} dy \\
&= \int_{0}^{+\infty} \left[(u+0.5)^2 + \frac{1}{4}\right] e^{-u} du \\
&= \int_{0}^{+\infty} \left[u^2 + u + \frac{1}{2}\right] e^{-u} du \\
&= -u^2 e^{-u}\Big|_0^{+\infty} + 2\int_0^{+\infty} u e^{-u} du + 1 + 0.5 \\
&= 2 + 1 + 0.5 = \frac{7}{2}.
\end{aligned}
$$

从而

$$
\mathrm{Var}X = EX^2 - (EX)^2 = \frac{7}{2} - \frac{1}{4} = \frac{13}{4}.
$$

(d) 的另一种解法

$$
\begin{aligned}
EX &= \int_0^{+\infty} P(X > x))dx - \int_{-\infty}^{0} P(X < x)dx \\
&= \int_1^{+\infty} \frac{1}{2} e^{-(x-1)} dx + \int_0^1 \frac{1}{2} dx - \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{2} e^x dx \\
&= \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{2} e^u du + \frac{1}{2} - \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{2} e^x dx \\
&= \frac{1}{2}.
\end{aligned}
$$

另外，

$$\begin{aligned}
EX^2 &= \int_0^{+\infty} P(X^2 > x)dx \\
&= \int_0^{+\infty} P(X^2 > u^2)du^2 \\
&= 2\int_0^{+\infty} u\left[P(X > u) + P(X < -u)\right]du \\
&= 2\int_0^{+\infty} u\left[\frac{e^{-(u-1)}I_{u>1}}{2} + \frac{I_{0<u<1}}{2} + \frac{e^{-u}}{2}\right]du \\
&= \int_1^{+\infty} ue^{-(u-1)}du + \int_0^1 udu + \int_0^{+\infty} ue^{-u}du \\
&= \int_0^{+\infty} (v+1)e^{-v}dv + \int_0^1 udu + \int_0^{+\infty} ue^{-u}du \\
&= 2 + \frac{1}{2} + 1 = \frac{7}{2}
\end{aligned}$$

从而

$$\mathrm{Var}X = EX^2 - (EX)^2 = \frac{7}{2} - \frac{1}{4} = \frac{13}{4}.$$

题 2 设随机变量 X 服从 $(-\pi/2, \pi/2)$ 上的均匀分布。
求：(a) 随机变量 $Y = \cos X$ 的概率密度函数。(b) Y 的数学期望和方差。
解：(a) 先求 Y 的概率分布函数，

$$\begin{aligned}
F_Y(y) &= P(Y \le y) = P(\cos X \le y) \\
&= I_{y\ge 1} + I_{0\le y<1}\left[P\left(-\frac{\pi}{2} < X \le -\arccos y\right) + P\left(\arccos y \le X < \frac{\pi}{2}\right)\right] \\
&= I_{y\ge 1} + I_{0\le y<1}\frac{\left[-\arccos y + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} - \arccos y\right]}{\pi} \\
&= I_{y\ge 1} + I_{0\le y<1}\frac{\pi - 2\arccos y}{\pi}.
\end{aligned}$$

由此解得 Y 的概率密度函数

$$f_Y(y) = F_Y'(y) = \frac{2}{\pi\sqrt{1-y^2}} I_{0\le y<1}.$$

(a) 的另解。直接利用随机变量函数的概率密度公式

$$\begin{aligned}
f_Y(y) &= \sum_{x:cosx=y} f_X(x)\frac{1}{\left|\frac{dy}{dx}\right|} \\
&= f_X(-\arccos y)\frac{1}{|(\cos x)'|_{x=-\arccos y}} + f_X(\arccos y)\frac{1}{|(\cos x)'|_{x=\arccos y}} \\
&= 2\frac{1}{\pi} I_{-\frac{\pi}{2}<\arccos y<\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-\cos^2 x}\Big|_{x=-\arccos y}} \\
&= \frac{2}{\pi\sqrt{1-y^2}} I_{0<y<1}.
\end{aligned}$$

(b)

$$EY=\int_{-\infty}^{+\infty} y f_Y(y) = \int_0^1 y\frac{2}{\pi\sqrt{1-y^2}}dy = -\frac{2}{\pi}\int_0^1 d\sqrt{1-y^2} = \frac{2}{\pi}.$$

或者利用随机变量函数的数学期望公式

$$EY=\int_{-\infty}^{+\infty}\cos x\cdot f_X(x)dx=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\sin x}{\pi}=\frac{2}{\pi}.$$

$$EY^2=\int_{-\infty}^{+\infty}\cos^2 x\cdot f_X(x)dx=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos(2x)+1}{2\pi}dx=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{2\pi}dx=\frac{1}{2}.$$

从而

$$\mathrm{Var}Y=EY^2-(EY)^2=\frac{1}{2}-\frac{4}{\pi^2}=\frac{\pi^2-8}{2\pi^2}\approx 0.095.$$

题 3 设随机变量 U 服从 $[0,1]$ 上的均匀分布，函数 $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 满足以下三个条件

1. 对任何 $x\in\mathbb{R}$，$F(-\infty)=0\le F(x)\le 1=F(+\infty)$；
2. F 单调不减；
3. F 在所有 $x\in\mathbb{R}$ 处都是右连续的。

证明：

1. 如果 F 连续且严格单调增，则随机变量 $X=F^{-1}(U)$ 的概率分布函数就是 F；
2. 一般情况下，即 F 不严格单调增或在某些 x 处不连续时，随机变量

$$X=\inf\{x\in\mathbb{R}|F(x)\ge U\}$$

   的概率分布函数就是 F 。

证明：1、因 F 严格单调增且连续，故 F^{-1} 在 $(0,1)$ 上处处有定义且严格单调增，于是对 $X=F^{-1}(U)$，

$$F_X(x)=P(X\le x)=P(F^{-1}(U)\le x)=P(U\le F(x))=F(x),\quad \forall x\in\mathbb{R}.$$

2、让我们先回顾一下上面这个证明。实际上，我们从 $X=F^{-1}(U)$ 得到对任意 $x\in\mathbb{R}$，如下事件关系成立

$$\{\omega\in\Omega:X(\omega)\le x\}=\{\omega\in\Omega:U(\omega)\le F(x)\}.$$

而这等价于对任意 $x\in\mathbb{R}$ 和任意 $\omega\in\Omega$，

$$X(\omega)\le x\Longleftrightarrow U(\omega)\le F(x).$$

这等价于

$$\{x\in\mathbb{R}:X(\omega)\le x\}=\{x\in\mathbb{R}:U(\omega)\le F(x)\},\qquad \forall\omega\in\Omega.$$

而上式左端是区间 $[X(\omega),+\infty)$，因此由上式可得

$$X(\omega)=\min\{x\in\mathbb{R}:X(\omega)\le x\}=\min\{x\in\mathbb{R}:U(\omega)\le F(x)\}.$$

但我们事先并不知道 $\{x \in \mathbb{R} : U(\omega) \le F(x)\}$ 是否有最小值，所以我们定义

$$X(\omega) = \inf\{x \in \mathbb{R} : U(\omega) \le F(x)\}.$$

这里 inf 表示“下确界”，即一个实数集合的所有下界中的最大下界。

现在我们已经知道了 X 的表达式的来历，让我们来证明对任意 $\omega \in \Omega$，集合 $\{x \in \mathbb{R} : U(\omega) \le F(x)\}$ 就是区间 $[X(\omega), +\infty)$，这样就有 $F_X = F$。

由 X 的定义，我们知道

$$\{x \in \mathbb{R} : U(\omega) \le F(x)\} \subset [X(\omega), +\infty).$$

所以，我们只需证明

$$[X(\omega), +\infty) \subset \{x \in \mathbb{R} : U(\omega) \le F(x)\}.$$

首先，如果 $t > X(\omega)$，那么 t 不是 $\{x \in \mathbb{R} : U(\omega) \le F(x)\}$ 的下界（因为 $X(\omega)$ 已经是最大的下界），所以存在 $x \in \mathbb{R}$ 满足

$$X(\omega) \le x < t, \quad U(\omega) \le F(x).$$

于是，由 F 单调不减，我们知道

$$U(\omega) \le F(x) \le F(t).$$

因此 $t \in \{x \in \mathbb{R} : U(\omega) \le F(x)\}$，于是我们证明了

$$(X(\omega), +\infty) \subset \{x \in \mathbb{R} : U(\omega) \le F(x)\}.$$

因为 F 右连续，所以

$$U(\omega) \le \lim_{x \searrow X(\omega)} F(x) = F(X(\omega)),$$

因此 $X(\omega) \in \{x \in \mathbb{R} : U(\omega) \le F(x)\}$。所以

$$[X(\omega), +\infty) \subset \{x \in \mathbb{R} : U(\omega) \le F(x)\}.$$

证毕。

请问：F 的第一条性质“对任何 $x \in \mathbb{R}$，$F(-\infty) = 0 \le F(x) \le 1 = F(+\infty)$”用在哪里了？

题 4 袋中装有 N 个球，其中白球数为随机变量，设为 X，已知 $EX = n$（n 可以不是整数）。证明从该袋中摸出一球为白球的概率是 n/N。并用这个结论解决习题 1.4.26。

证明：记 B（取“白”字的汉语拼音的首个字母）为事件“从袋中随机取出一个球是白球”。在已知袋中有 k 个白球的情况下，

$$P(B|X = k) = \frac{k}{N}.$$

从由全概率公式，

$$P(B) = \sum_{k \ge 0} P(X = k) P(B|X = k) = \sum_{k \ge 0} P(X = k) \frac{k}{N} = \frac{EX}{N}.$$

证毕。

下面我们求解习题 1.4.26，即从装有 b 个黑球，r 个红球的袋中每次取出一个球，然后将其放回同时再加入 c 的同颜色的球，然后再取，记 B_k 表示第 k 次取得的是黑球。我们希望证明

$$P(B_k)=\frac{b}{b+r},\qquad \forall k\geq 1.$$

当 $k=1$ 时，上述结论是显然的。假设 $k-1$ 时结论成立，我们来证明 k 时结论也成立。

记 X_k 为第 k 次取球前袋中的黑球数，

$$\xi_k=I_{B_k}=\begin{cases}1, & \text{若第 } k \text{ 次取到的是黑球;}\\ 0, & \text{否则.}\end{cases}.$$

于是

$$X_k=X_{k-1}+c\xi_{k-1}.$$

另外，利用我们刚证明的结论，

$$P(B_k)=\frac{EX_k}{b+r+(k-1)c},\quad P(B_{k-1})=\frac{EX_{k-1}}{b+r+(k-2)c}.$$

而

$$EX_k=EX_{k-1}+cE\xi_{k-1}=\big[b+r+(k-2)c\big]P(B_{k-1})+cP(B_{k-1})=\big[b+r+(k-1)c\big]P(B_{k-1}),$$

所以

$$P(B_k)=\frac{\big[b+r+(k-1)c\big]P(B_{k-1})}{b+r+(k-1)c}=P(B_{k-1})=\frac{b}{b+r}.$$

题 5 若一个离散型随机变量 X 在某个点上的概率达到最大，则称该点为“众数”(mode)。分别求二项分布、泊松分布和负二项分布的众数。

解：设 X 服从二项分布 $B(n,p)$，则

$$P(X=k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k},\quad k=0,1,\ldots,n.$$

我们比较相邻两项的概率值的大小，因为它们都是乘积的形式，所以我们比较它们的比值与 1 孰大孰小，

$$\frac{P(X=k)}{P(X=k-1)}-1=\frac{(n-k+1)p}{k(1-p)}-1=\frac{(n+1)p-k}{k(1-p)}.$$

因此当且仅当

$$k<(n+1)p$$

时，$P(X=k)>P(X=k-1)$。同理可证，当且仅当

$$k>(n+1)p-1$$

时，$P(X=k)>P(X=k+1)$。

如果 $(n+1)p$ 不是整数，那么它的整数部分 $[(n+1)p]$（即不大于 $(n+1)p$ 的最大整数）是区间 $\big[(n+1)p-1,(n+1)p\big]$ 中的唯一整数，它就是二项分布 $B(n,p)$ 的众数。

如果 $(n+1)p$ 是整数，则分布列在截至 $(n+1)p-1$ 时都是严格增，从 $(n+1)p$ 以后变成严格减，而

$$P(X=(n+1)p)=P(X=(n+1)p-1),$$

所以，这时二项分布 $B(n,p)$ 有两个众数：$(n+1)p-1$ 和 $(n+1)p$。

注意，二项分布的众数与它的数学期望 np 在数值上不同，但只是稍有区别。

类似讨论 Poisson 分布和负二项分布。这些分布都是所谓“单峰”分布，即分布列 $P(X=k)$ 随着 k 增大先增大后减少。

题 6 求实数 c 使 $E|X-c|$ 达到最小。

解：我们先考虑一种很特殊的情形，X 有概率密度函数 $f(x)$，并且 $f(x)$ 处处连续。

$$h(c):=E|X-c|=\int_{-\infty}^{+\infty}|x-c|f(x)dx=\int_{c}^{+\infty}(x-c)f(x)dx+\int_{-\infty}^{c}(c-x)f(x)dx.$$

于是 h 关于 c 可微，

$$\begin{aligned}h'(c)&=\frac{d}{dc}\left(\int_{c}^{+\infty}(x-c)f(x)dx\right)+\frac{d}{dc}\left(\int_{-\infty}^{c}(c-x)f(x)dx\right)\\&=-(c-c)f(c)-\int_{c}^{+\infty}f(x)dx+(c-c)f(c)+\int_{-\infty}^{c}f(x)dx\\&=F(c)-\big[1-F(c)\big]=2F(c)-1.\end{aligned}$$

所以，在区间 $I_1:=\{c:F(c)<1/2\}$ 上，$h'(c)<0$，h 严格减，在区间 $I_3:=\{c:F(c)>1/2\}$ 上，$h'(c)>0$，h 严格增，在区间

$$I_2:=\{c:F(c)=1/2\}$$

上，h 为常数，所以区间 I_2 中的点都是 h 的最小值点。当区间 I_2 是单点集时，这个唯一的 c 值恰是 X 的中位数。

下面我们考虑一般情形。这时，

$$\begin{aligned}h(c):=E|X-c|&=\int_{0}^{+\infty}P(|X-c|>x)dx\\&=\int_{0}^{+\infty}P(X>c+x)dx+\int_{0}^{+\infty}P(X<c-x)dx\\&=\int_{c}^{+\infty}P(X>x)dx+\int_{-\infty}^{c}P(X<x)dx.\end{aligned}$$

所以，对 $c_1<c_2$，

$$h(c_2)-h(c_1)=\int_{c_1}^{c_2}P(X<x)dx-\int_{c_1}^{c_2}P(X>x)dx,$$

于是

$$\big[P(X<c_1)-P(X>c_1)\big](c_2-c_1)\le h(c_2)-h(c_1)\le\big[P(X<c_2)-P(X>c_2)\big](c_2-c_1).$$

如果 $F(c_2)<\frac{1}{2}$，则

$$P(X<c_2)-P(X>c_2)\le 2F(c_2)-1<0.$$

如果 $P(X<c_1)>\frac{1}{2}$，则

$$P(X<c_1)-P(X>c_1)=P(X<c_1)-1+P(X\le c_1)\ge 2P(X<c_1)-1>0.$$

于是 h 在区间

$$I_1:=\left\{c\in\mathbb{R}:F(c)<\frac{1}{2}\right\}$$

上严格减（由分布函数的性质，我们知道 I_1 是形如 $(c^*,+\infty)$ 的开区间），在区间

$$I_3:=\left\{c\in\mathbb{R}:P(X<c)>\frac{1}{2}\right\}$$

上严格增（由函数 $c\mapsto P(X<c)$ 的性质，我们知道 I_3 是形如 $(-\infty,c_*)$ 的开区间）。如果 $c_1<c_2$ 是区间

$$I_2:=\left\{c\in\mathbb{R}:P(X<c)\le\frac{1}{2}\le F(c)\right\}=[c_*,c^*]$$

中的两个点，则

$$\frac{1}{2}\le F(c_1)=P(X\le c_1)\le P(X<c_2)\le\frac{1}{2},$$

所以

$$F(c)=P(X<c)=\frac{1}{2},\quad\forall c\in I_2,$$

于是对任意 $c_1,c_2\in I_2,c_1<c_2$，

$$0=\big[P(X<c_1)-P(X>c_1)\big](c_2-c_1)\le h(c_2)-h(c_1)\le\big[P(X<c_2)-P(X>c_2)\big](c_2-c_1)=0,\quad\forall.$$

即 h 在区间 I_2 上为常值。这个常值就是 h 的最小值。

当 I_2 是单点集时，这个唯一的 c 值恰是 X 的中位数。

注：在分布函数的图像中把

$$h(c)=\int_c^{+\infty}P(X>x)dx+\int_{-\infty}^{c}P(X<x)dx.$$

解释成某些特定区域（直线 $x=c$ 左侧、分布函数图像以下、$y=0$ 以上的区域及直线 $x=c$ 右侧、分布函数图像以上、$y=1$ 以下的区域）的面积，你可以更直观地理解上述一般情形的证明（比如让直线 $x=c$ 从左向右移动）。

题 7 设随机变量 X 服从参数为 λ 的泊松分布，试导出 X 的 k 阶原点矩的递推公式，并由此求出 X 的二阶、三阶、四阶原点矩及中心矩。

解：考虑 X 的概率母函数

$$g(z)=E(z^X)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\lambda^n}{n!}e^{-\lambda}z^n=e^{\lambda(z-1)}.$$

求关于 z 的 k 阶导数在 $z=1$ 的值，得到

$$\begin{aligned}g^{(k)}(1)&=E\big[X(X-1)\cdots(X-k+1)1^{X-k}\big]=E\big[X(X-1)\cdots(X-k+1)\big]\\&=k!\times e^{\lambda(z-1)}\text{ 在 }z=1\text{ 处的 Taylor 展开式中 }(z-1)^k\text{ 的系数}=\lambda^k.\end{aligned}$$

所以

$$EX^k + a_{k,k-1}EX^{k-1} + a_{k,k-2}EX^{k-2} + \cdots + a_{k,1}EX = \lambda^k,$$

其中 $a_{k,k-1},\ldots,a_{k,1}$ 满足

$$x(x-1)\cdots(x-k+1) = x^k + a_{k,k-1}x^{k-1} + \cdots + a_{k,1}x.$$

易见

$$\begin{aligned}
a_{k+1,k} &= a_{k,k-1} - k,\\
a_{k+1,j} &= a_{k,j-1} - ka_{k,j}, \quad j = 2,3,\ldots,k-1;\\
a_{k+1,1} &= -ka_{k,1}.\\
a_{2,1} &= -1.
\end{aligned}$$

由

$$E(X(X-1)) = \lambda^2$$

得到

$$EX^2 = \lambda^2 + EX = \lambda^2 + \lambda.$$

由

$$E(X(X-1)(X-2)) = \lambda^3$$

得到

$$EX^3 = \lambda^3 + 3EX^2 - 2EX = \lambda^3 + 3(\lambda^2+\lambda) - 2\lambda = \lambda^3 + 3\lambda^2 + \lambda.$$

由

$$E(X(X-1)(X-2)(X-3)) = \lambda^4$$

得到

$$EX^4 = \lambda^4 + 6EX^2 - 11EX^2 + 6EX = \lambda^4 + 6(\lambda^3+3\lambda^2+\lambda) - 11(\lambda^2+\lambda) + 6\lambda = \lambda^4 + 6\lambda^3 + +7\lambda^2 + \lambda.$$

利用

$$E(X-EX)^k = E(X-\lambda)^k = \sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}(-\lambda)^{k-i}EX^i$$

可从 X 的各阶原点矩得到 X 的各阶中心矩。