

概率论与数理统计第四次习题课题目

题1 随机变量 Z 服从区间 $[0, 2\pi]$ 上的均匀分布。求 $X = \sin Z, Y = \cos Z$ 的相关系数 $\text{Corr}(X, Y)$ ，并判断 X 与 Y 的独立性。

题2 设 (X_1, X_2, \dots, X_r) 服从多项分布 $M(n, p_1, p_2, \dots, p_r)$ ($p_i > 0, i = 1, \dots, r$ 且 $p_1 + \dots + p_r = 1$)。求 X_i 与 X_j 的相关系数, $i, j = 1, \dots, r$ 。

题3 设 (X, Λ) 的概率分布为： Λ 的边缘分布密度为 $\frac{1}{\lambda^2}e^{-\beta/\lambda}$, $\lambda > 0$, 其中 β 为正常数；给定 $\Lambda = \lambda$ 时, X 服从期望为 λ 的指数分布。求 EX 。

题4 设 $X, Y \stackrel{i.i.d}{\sim} \text{Exp}(\lambda)$ 。求

$$Z = \begin{cases} 3X + 1, & \text{若 } X \geq Y \\ 6Y, & \text{若 } X < Y \end{cases}.$$

的数学期望。（这是教材习题3.5.12。）

题5 设一对夫妻购买了一项生命年金，支付方式为：当夫妻两人中有一人去世时开始支付，而当另一人也去世时停止支付。记年金开始支付时间为 X ，停止支付时间为 Y 。设这对夫妻在购买年金后的存活年限相互独立，都服从指数分布 $\text{Exp}(\lambda)$ 。

1. 求 X 对 Y 的线性回归（即用 X 的一次函数对 Y 作最小二乘最佳逼近）；
2. 求 Y 对 X 的线性回归；
3. 求 X 的函数对 Y 作最小二乘最佳逼近。

题6 一个家族第 n 代男性子孙有 X_n 个人, $X_0 = 1$ 。假设这个家族中每个男性成员的儿子个数是独立同分布的随机变量, 求 $\lim_{n \rightarrow +\infty} P(X_n = 0)$ 。