概率论与数理统计第四次习题课题目解答

题1 随机变量Z服从区间$[0,2\pi]$上的均匀分布。求$X=\sin Z, Y=\cos Z$的相关系数$\mathrm{Corr}(X,Y)$，并判断X与Y的独立性。

解:

$$EX=E(\sin Z)=\int_0^{2\pi}\sin z\cdot\frac{1}{2\pi}dz=0,$$

$$\mathrm{Var}X=EX^2-(EX)^2=EX^2=E(\sin^2 Z)=\int_0^{2\pi}\sin^2 z\cdot\frac{1}{2\pi}dz=\int_0^{2\pi}\frac{1-\cos 2z}{2}\cdot\frac{1}{2\pi}dz=\frac{1}{2},$$

同理可得

$$EY=0,\qquad \mathrm{Var}Y=\frac{1}{2}.$$

再由

$$E(XY)=E(\sin Z\cos Z)=\int_0^{2\pi}\sin z\cos z\cdot\frac{1}{2\pi}dz=0$$

知$\mathrm{Cov}(X,Y)=0$，从而

$$\mathrm{Corr}(X,Y)=\frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sqrt{\mathrm{Var}X\mathrm{Var}Y}}=0,$$

因此X,Y不相关。

但是X,Y不独立，这是因为

$$P(|X|<0.5,|Y|<0.5)\le P(X^2+Y^2<0.5)=0<P(|X|<0.5)\cdot P(|Y|<0.5).$$

在这个问题中，虽然X,Y各自有概率密度，但由于(X,Y)只能出现在单位圆周

$$S^1=\{(x,y)|x^2+y^2=1\}$$

上，所以它们没有联合概率密度。而如果X,Y独立，则$p_X(x)p_Y(y)$就是(X,Y)的联合概率密度函数，这与(X,Y)无联合概率密度的事实矛盾，所以X,Y不独立。

于是，我们得到不相关但不独立的一个实例。

题2 设$(X_1,X_2,\ldots,X_r)$服从多项分布$M(n,p_1,p_2,\ldots,p_r)$（$p_i>0, i=1,\ldots,r$且$p_1+\cdots+p_r=1$）。求X_i与X_j的相关系数，$i,j=1,\ldots,r$。

解法1： 由相关系数的定义不难验证$\mathrm{Corr}(X_i,X_i)=1$。下面考虑$i\neq j$的情形。

由多项分布的性质知，$X_i\sim B(n,p_i)$，$(X_i,X_j,n-X_i-X_j)\sim M(n,p_i,p_j,1-p_i-p_j)$，所以

$$EX_i=np_i,\qquad \mathrm{Var}X_i=np_i(1-p_i).$$

$$\begin{aligned}E(X_iX_j)&=\sum_{k\ge0,l\ge0,k+l\le n}kl\cdot P(X_i=k,X_j=l)\\&=\sum_{k\ge0,l\ge0,k+l\le n}kl\cdot\frac{n!}{k!l!(n-k-l)!}p_i^kp_j^l(1-p_i-p_j)^{n-k-l}\\&=n(n-1)p_ip_j\sum_{k\ge1,l\ge1,k+l\le n}\frac{(n-2)!}{(k-1)!(l-1)!(n-k-l)!}p_i^{k-1}p_j^{-1-1}(1-p_i-p_j)^{n-k-l}\\&\qquad\text{（注意这个求和的概率含义）}\\&=n(n-1)p_ip_j.\end{aligned}$$

所以，

$$\mathrm{Cov}(X_i, X_j) = E(X_iX_j) - EX_i \cdot EX_j = n(n-1)p_ip_j - np_i \cdot np_j = -np_ip_j.$$

从而

$$\mathrm{Corr}(X_i, X_j) = \frac{\mathrm{Cov}(X_i, X_j)}{\sqrt{\mathrm{Var}X_i \mathrm{Var}X_j}} = -\sqrt{\frac{p_ip_j}{(1-p_i)(1-p_j)}}.$$

解法2: 由相关系数的定义不难验证$\mathrm{Corr}(X_i, X_i) = 1$。下面考虑$i \neq j$的情形。

由多项分布的性质知，$X_i \sim B(n, p_i)$，$X_i + X_j \sim B(n, p_i + p_j)$，所以

$$EX_i = np_i, \qquad \mathrm{Var}X_i = np_i(1-p_i).$$

由

$$\mathrm{Var}(X_i + X_j) = \mathrm{Var}X_i + \mathrm{Var}X_j + 2\mathrm{Cov}(X_i, X_j)$$

得

$$\mathrm{Cov}(X_i, X_j) = \frac{n(p_i+p_j)(1-p_i-p_j) - np_i(1-p_i) - np_j(1-p_j)}{2} = -np_ip_j.$$

所以，

$$\mathrm{Corr}(X_i, X_j) = \frac{\mathrm{Cov}(X_i, X_j)}{\sqrt{\mathrm{Var}X_i \mathrm{Var}X_j}} = -\sqrt{\frac{p_ip_j}{(1-p_i)(1-p_j)}}.$$

解法3: 由相关系数的定义不难验证$\mathrm{Corr}(X_i, X_i) = 1$。下面考虑$i \neq j$的情形。

记

$$Y_k^{(i)} = \begin{cases} 1, & \text{若第}k\text{次试验得到第}i\text{种结果;} \\ 0, & \text{否则} \end{cases}, \qquad 1 \le i \le r, 1 \le k \le n.$$

于是

$$X_i = \sum_{k=1}^{n} Y_k^{(i)}.$$

关于$Y_k^{(i)}$，我们有以下结论:

- 任何一次试验不会有两种不同的结果同时发生，所以对任何$i \neq j$，$Y_k^{(i)}$和$Y_k^{(j)}$中至少有一个为零，从而$Y_k^{(i)}Y_k^{(j)} = 0$。
- 各次试验是独立进行的，所以对任何$i_1, \ldots, i_n \in \{1, \ldots, r\}$，$Y_1^{(i_1)}, \ldots, Y_n^{(i_n)}$独立。
- 对任何i和k，$EY_k^{(i)} = p_i$，$\mathrm{Var}Y_k^{(i)} = P(Y_k^{(i)} = 1)P(Y_k^{(i)} = 0) = p_i(1-p_i)$。

从而利用独立和的方差性质，

$$\mathrm{Var}X_i = \mathrm{Var}\left(\sum_{k=1}^{n} Y_k^{(i)}\right) = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Var}(Y_k^{(i)}) = np_i(1-p_i).$$

利用协方差的双线性、对称性，独立性蕴含不相关性等性质，我们有

$$\begin{aligned}
\mathrm{Cov}(X_i, X_j) &= \mathrm{Cov}\left(\sum_{k=1}^{n} Y_k^{(i)}, \sum_{l=1}^{n} Y_l^{(j)}\right) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Cov}(Y_k^{(i)}, Y_k^{(j)}) + 2\sum_{1\le k<l\le n} \mathrm{Cov}(Y_k^{(i)}, Y_l^{(j)}) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Cov}(Y_k^{(i)}, Y_k^{(j)}) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \left[E(Y_k^{(i)}, Y_k^{(j)}) - E(Y_k^{(i)})E(Y_k^{(j)})\right] \\
&= \sum_{k=1}^{n} \left[E(Y_k^{(i)}, Y_k^{(j)}) - E(Y_k^{(i)})E(Y_k^{(j)})\right] \\
&= \sum_{k=1}^{n} \left[-p_i p_j\right] = -np_i p_j.
\end{aligned}$$

所以，

$$\mathrm{Corr}(X_i, X_j) = \frac{\mathrm{Cov}(X_i, X_j)}{\sqrt{\mathrm{Var}X_i \mathrm{Var}X_j}} = -\sqrt{\frac{p_i p_j}{(1-p_i)(1-p_j)}}.$$

题3 设(X,Λ)的概率分布为：Λ的边缘分布密度为$\frac{1}{\lambda^2}e^{-\beta/\lambda}$，$\lambda > 0$，其中$\beta$为正常数；给定$\Lambda = \lambda$时，$X$服从期望为$\frac{1}{\lambda}$的指数分布。求$EX$。

解法1： 由X关于Λ的条件分布知，

$$E(X|\Lambda=\lambda) = \frac{1}{\lambda}.$$

因此由全期望公式

$$EX = E(E(X|\Lambda)) = \int_0^{+\infty} E(X|\Lambda=\lambda) f_\Lambda(\lambda) d\lambda = \int_0^{+\infty} \frac{1}{\lambda^3} e^{-\frac{\beta}{\lambda}} d\lambda = \frac{1}{\beta^2},$$

最后的积分计算中利用了变量代换$t = 1/\lambda$。
而由Λ的概率密度的归一化

$$1 = \int_0^{+\infty} \frac{1}{\lambda^2} e^{-\frac{\beta}{\lambda}} d\lambda$$

得到$\beta = 1$，从而$EX = 1$。

解法2： 先求(X,Λ)的联合概率密度

$$f_{X,\Lambda}(x,\lambda) = f_\Lambda(\lambda) f_{X|\Lambda}(x|\lambda) = \frac{1}{\lambda^2} e^{-\frac{\beta}{\lambda}} I_{\lambda>0} \cdot \lambda e^{-\lambda x} I_{x>0}.$$

进而得到X的边缘概率密度

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,\Lambda}(x,\lambda) d\lambda = \int_0^{+\infty} \frac{1}{\lambda^3} e^{-\frac{\beta}{\lambda}} \lambda e^{-\lambda x} d\lambda,$$

最后这个积分虽无初等函数的表达式，但并不妨碍我们从定义计算EX

$$EX=\int_{-\infty}^{+\infty}xf_X(xdx=\int_0^{+\infty}x\int_0^{+\infty}\frac{1}{\lambda^2}e^{-\frac{\beta}{\lambda}-\lambda x}d\lambda dx=\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}\frac{x}{\lambda^2}e^{-\frac{\beta}{\lambda}-\lambda x}dxd\lambda=\frac{1}{\beta^2},$$

这里交换累次积分的顺序是关键。

而由Λ的概率密度的归一化

$$1=\int_0^{+\infty}\frac{1}{\lambda^2}e^{-\frac{\beta}{\lambda}}d\lambda$$

得到$\beta=1$，从而$EX=1$。

题4 设$X,Y\overset{i.i.d}{\sim}\mathrm{Exp}(\lambda)$。求

$$Z=\begin{cases}3X+1, & \text{若}X\geq Y\\ 6Y, & \text{若}X<Y\end{cases}.$$

的数学期望。（这是教材习题3.5.12。）

解法1： 记

$$\begin{aligned}h(x,y)&=\begin{cases}3x+1, & x\geq y\\ 6y, & x<y.\end{cases}\\ &=(3x+1)\cdot I_{x\geq y}+6y\cdot I_{x<y}\\ &=(3x+1)\cdot(1-I_{x<y})+6y\cdot I_{x<y}\\ &=(3x+1)+(6y-3x-1)\cdot I_{x<y},\end{aligned}$$

所以

$$Z=h(X,Y)=(3X+1)+(6Y-3X-1)\cdot I_{X<Y}.$$

于是

$$\begin{aligned}E[Z]=E[h(X,Y)]&=\iint\limits_{\mathbb{R}^2}h(x,y)f_{X,Y}(x,y)dxdy\\ &=\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}\big[(3x+1)+(6y-3x-1)I_{x<y}\big]\lambda e^{-\lambda x}\lambda e^{-\lambda y}dxdy\\ &=\int_0^{+\infty}(3x+1)\lambda e^{-\lambda x}dx\int_0^{+\infty}\lambda e^{-\lambda y}dy+\int_0^{+\infty}\left(\int_x^{+\infty}\big(6y-3x-1\big)\lambda e^{-\lambda y}dy\right)\lambda e^{-\lambda x}dx\\ &=\left(\frac{3}{\lambda}+1\right)\cdot 1+\int_0^{+\infty}\left(\int_x^{+\infty}\big[6(y-x)+3x-1\big]\lambda e^{-\lambda(y-x)}dy\right)\lambda e^{-2\lambda x}dx\\ &=\frac{3}{\lambda}+1+\int_0^{+\infty}\left(\frac{6}{\lambda}+(3x-1)\right)\lambda e^{-2\lambda x}dx=\frac{3}{\lambda}+1+\frac{3}{\lambda}+\frac{3}{4\lambda}-\frac{1}{2}=\frac{27}{4\lambda}+\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

解法2： 与解法1类似，得到

$$Z=h(X,Y)=(3X+1)+(6Y-3X-1)\cdot I_{X<Y}.$$

我们希望通过全期望公式$EZ=E[E(Z|X)]$来计算Z的数学期望。

$$\begin{aligned}
E[Z|X=x] &= E(h(X,Y)|X=x) = E(h(x,Y)|X=x) \\
&= E(h(x,Y)) \qquad (h(x<Y)\text{是}Y\text{的函数与}X\text{独立}) \\
&= \int_0^{+\infty} \big[(3x+1) + (6y-3x-1)\cdot I_{x<y}\big]\lambda e^{-\lambda y}dy \\
&= 3x+1+e^{-\lambda x}\int_x^{+\infty}\big[6(y-x)+3x-1\big]\lambda e^{-\lambda(y-x)}dy \\
&= 3x+1+e^{-\lambda x}\left(\frac{6}{\lambda}+(3x-1)\right).
\end{aligned}$$

从而

$$\begin{aligned}
EZ = E[E(Z|X)] &= \int_0^{+\infty} E(Z|X=x)\lambda e^{-\lambda x}dx \\
&= \int_0^{+\infty}\left[3x+1+e^{-\lambda x}\left(\frac{6}{\lambda}-1+3x\right)\right]\lambda e^{-\lambda x}dx \\
&= \frac{3}{\lambda}+1+\frac{3}{\lambda}-\frac{1}{2}+\frac{3}{4\lambda} = \frac{27}{4\lambda}+\frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

解法3: 用X,Y的大小关系来划分，这相当于$E[E(Z|I_{X\geq Y})]$，

$$\begin{aligned}
EZ &= E(Z|X\geq Y)P(X\geq Y) + E(Z|X<Y)P(X<Y) \\
&= E(3X+1|X\geq Y)P(X\geq Y) + E(6Y|X<Y)P(X<Y) \\
&= \big[3E(X|X\geq Y)+1\big]P(X\geq Y) + 6E(Y|X<Y)P(X<Y).
\end{aligned}$$

由于X,Y独立同分布，所以X,Y的联合概率密度函数与Y,X的联合概率密度函数相同，因此我们可以对调X,Y的角色，

$$P(X<Y) = P(Y<X) = P(Y\leq X),$$

而

$$P(X<Y)+P(X\geq Y) = 1,$$

所以$P(X\geq Y) = P(X<Y) = 1/2$，另外，

$$E(X|X\geq Y) = E(Y|X<Y),$$

所以

$$EZ = \frac{9}{2}E(X|X\geq Y)+\frac{1}{2}.$$

为计算$E(X|X\geq Y)$，我们先计算在已知$X\geq Y$的条件下，X的条件概率分布函数和条件概率密度函数。

$$\begin{aligned}
F_{X|X\geq Y}(x) &= P(X\leq x|X\geq Y) \\
&= \frac{P(Y\leq X\leq x)}{P(X\geq Y)} = 2P(Y\leq X\leq x) \\
&= 2\int_0^x\int_v^x \lambda e^{-\lambda u}\lambda e^{-\lambda v}dudv \\
&= 2\int_0^x \big[e^{-\lambda v}-e^{-\lambda x}\big]\lambda e^{-\lambda v}dv,
\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned} f_{X|X\geq Y}(x) &= \frac{d}{dx}F_{X|X\geq Y}(x) \\ &= 2\int_0^x \lambda e^{-\lambda x}\lambda e^{-\lambda v}dv = 2\lambda e^{-\lambda x}\left(1-e^{-\lambda x}\right)I_{x>0}, \end{aligned}$$

于是

$$E(X|X\geq Y) = \int_0^{+\infty} x\cdot 2\lambda e^{-\lambda x}\left(1-e^{-\lambda x}\right)dx = \frac{2}{\lambda}-\frac{1}{2\lambda} = \frac{3}{2\lambda},$$

从而

$$EZ = \frac{27}{4\lambda}+\frac{1}{2}.$$

附注：

- 《概率论与数理统计教程》书后答案是错的，《概率论与数理统计教程——习题与解答》中给出的解法也是错的！！！作者错误地认为当X,Y独立时，

  $$EZ = E(3X+1)P(X\geq Y)+E(6Y)P(X<Y),$$

  这对初学的人是个常见的错误，因为他们只关心随机变量Z在某些特定条件下的取值（比如当$X\geq Y$，$Z=3X+1$），而忽略了随机变量的概率分布受这些特定条件的影响。所以这个错误的解答对初学者更具迷惑性，而且作者还特别指出这个等式“的证明这里略去”，这就更加让学生认为这个“直观的结论”是对的，只不过证明需要费些口舌。
- 在解法3中我们可以更多地利用X,Y的对称性。比如

  $$\begin{aligned} P(Y\leq X\leq x) = P(X\leq Y\leq x) &= \frac{P(X\leq Y\leq x)+P(Y\leq X\leq x)}{2} \\ &= \frac{P(X\leq x, Y\leq x)}{2} \\ &= \frac{\left[P(X\leq x)\right]^2}{2} = \frac{(1-e^{-\lambda x})^2}{2}I_{x>0}, \end{aligned}$$

  所以

  $$F_{X|X\geq Y}(x) = (1-e^{-\lambda x})^2 I_{x>0},$$

  从而得到

  $$f_{X|X\geq Y}(x) = 2\lambda e^{-\lambda x}(1-e^{-\lambda x})I_{x>0}.$$
- 另外一种利用对称性的方法是

  $$\begin{aligned} EZ &= \frac{9}{2}E(X|X\geq Y)+\frac{1}{2} \\ &= \frac{9}{2}\left[P(X\geq Y)E(X|X\geq Y)+P(X<Y)E(Y|X<Y)\right]+\frac{1}{2} \\ &= \frac{9}{2}E(\max\{X,Y\})+\frac{1}{2} \\ &= \frac{9}{2}\left[EX+EY-E(\min\{X,Y\})\right]+\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

  由于X,Y服从指数分布Exp(λ)并且相互独立，所以$\min\{X,Y\}$服从指数分布Exp$(\lambda+\lambda)$，这可以利用指数分布是唯一具有“无记忆性”的连续分布这一事实得到。所以，

  $$EZ = \frac{9}{2}\left[\frac{1}{\lambda}+\frac{1}{\lambda}-\frac{1}{2\lambda}\right]+\frac{1}{2} = \frac{27}{4\lambda}+\frac{1}{2}.$$

题5 设一对夫妻购买了一项生命年金，支付方式为：当夫妻两人中有一人去世时开始支付，而当另一人也去世时停止支付。记年金开始支付时间为X，停止支付时间为Y。设这对夫妻在购买年金后的存活年限相互独立，都服从指数分布Exp(λ)。

1. 求X对Y的线性回归（即用X的一次函数对Y作最小二乘最佳逼近）；
解： 设夫妻二人的存活年限分别为U,V，则$U,V \overset{i.i.d.}{\sim} \mathrm{Exp}(\lambda)$，$X=\min\{U,V\}$，$Y=\max\{U,V\}$。于是$X\sim \mathrm{Exp}(2\lambda)$，从而
$$EX=\frac{1}{2\lambda},\quad \mathrm{Var}X=\frac{1}{4\lambda^2}.$$
从而
$$EY=E(X+Y)-EX=E(U+V)-EX=EU+EV-EX=\frac{1}{\lambda}+\frac{1}{\lambda}-\frac{1}{2\lambda}=\frac{3}{2\lambda},$$
$$E(XY)=E(UV)=EU\cdot EV=\frac{1}{\lambda^2},$$
$$\mathrm{Cov}(X,Y)=E(XY)-EX\cdot EY=\frac{1}{\lambda^2}-\frac{1}{2\lambda}\cdot\frac{3}{2\lambda}=\frac{1}{4\lambda^2},$$
所以X对Y线性回归方程为
$$\hat{Y}=\frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\mathrm{Var}X}(X-EX)+EY=\left(X-\frac{1}{2\lambda}\right)+\frac{3}{2\lambda}=X+\frac{1}{\lambda}.$$

2. 求Y对X的线性回归；
解： 在第一问计算的基础上，我们只需再求Y的方差。利用
$$\mathrm{Var}(X+Y)=\mathrm{Var}(U+V),$$
我们得到
$$\mathrm{Var}X+2\mathrm{Cov}(X,Y)+\mathrm{Var}Y=\mathrm{Var}U+\mathrm{Var}V,$$
从而
$$\mathrm{Var}Y=\frac{1}{\lambda^2}+\frac{1}{\lambda^2}-\frac{1}{4\lambda^2}-\frac{2}{4\lambda^2}=\frac{5}{4\lambda^2},$$
所以Y对X线性回归方程为
$$\hat{X}=\frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\mathrm{Var}Y}(Y-EY)+EX=\frac{1}{5}\left(Y-\frac{3}{2\lambda}\right)+\frac{1}{2\lambda}=\frac{Y}{5}+\frac{1}{5\lambda}.$$

3. 求X的函数对Y作最小二乘最佳逼近。
解： 我们知道$E(Y|X)$就是最小二乘最佳逼近。我们先计算X,Y的联合概率分布函数
$$\begin{aligned}f_{X,Y}(x,y)&=\left(f_{U,V}(x,y)\frac{1}{\left|\det\frac{\partial(x,y)}{\partial(x,y)}\right|}+f_{U,V}(y,x)\frac{1}{\left|\det\frac{\partial(x,y)}{\partial(y,x)}\right|}\right)I_{x\le y}\\&=2\lambda^2e^{-\lambda(x+y)}I_{0<x\le y},\end{aligned}$$
从而得到X的边缘概率密度
$$f_X(x)=I_{x>0}\int_x^{+\infty}2\lambda^2e^{-\lambda(x+y)}dy=2\lambda e^{-2\lambda x}I_{x>0},$$

及条件概率密度函数

$$f_{Y|X}(y|x) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_X(x)} = \lambda e^{-\lambda(y-x)} I_{y\geq x>0}$$

因此

$$E(Y|X=x) = I_{x>0}\int_x^{+\infty} y\lambda e^{-\lambda(y-x)}dy = \left(x+\frac{1}{\lambda}\right) I_{x>0},$$

因此

$$E(Y|X) = X + \frac{1}{\lambda}.$$

附注：类似计算可得

$$E(X|Y) = \frac{-e^{-\lambda Y}}{1-e^{-\lambda Y}}Y + \frac{1}{\lambda}.$$

这说明所谓“非线性最小二乘回归”有可能是真正非线性的，也有可能是线性的。

题6 一个家族第n代男性子孙有X_n个人，$X_0=1$。假设这个家族中每个男性成员的儿子的个数是独立同分布的随机变量，求$\lim\limits_{n\to+\infty} P(X_n=0)$。

解： 记$Y_i^{(n)}$为第n代中第i个人的儿子个数，所以

$$X_{n+1} = \sum_{i=1}^{X_n} Y_i^{(n)},$$

从而由全概率公式，

$$\begin{aligned}
P(X_{n+1}=0) &= \sum_{j\geq 0} P(X_n=j)P(X_{n+1}=0|X_n=j) \\
&= \sum_{j\geq 0} P(X_n=j)P(Y_1^{(n)}+\cdots+Y_j^{(n)}=0|X_n=j) \\
&= \sum_{j\geq 0} P(X_n=j)P(Y_1^{(n)}=\cdots=Y_j^{(n)}=0|X_n=j) \\
&= \sum_{j\geq 0} P(X_n=j)P(Y_1^{(n)}=0)\cdots P(Y_j^{(n)}=0) \\
&= \sum_{j\geq 0} P(X_n=j)\big[P(X_1=0)\big]^j \\
&= g_{X_n}\big(P(X_1=0)\big).
\end{aligned}$$

其中$g_{X_n}(z)$是X_n的概率母函数，所以$P(X_{n+1}=0)$涉及X_n的整个概率分布。因此我们考

虑X_n的概率母函数的递归关系，利用全期望公式

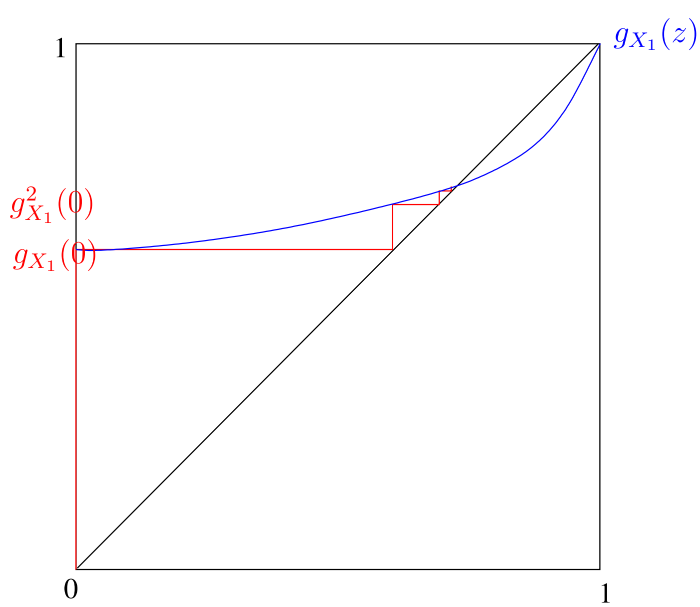
$$\begin{aligned}
g_{X_{n+1}}(z) &= E\left(z^{X_{n+1}}\right) \\
&= E\left[E\left(z^{X_{n+1}}|X_n\right)\right] \\
&= \sum_{j\geq 0} P(X_n=j)E\left(z^{X_{n+1}}|X_n=j\right) \\
&= \sum_{j\geq 0} P(X_n=j)E\left(z^{Y_1^{(n)}+\cdots+Y_j^{(n)}}|X_n=j\right) \\
&= \sum_{j\geq 0} P(X_n=j)E\left(z^{Y_1^{(n)}+\cdots+Y_j^{(n)}}\right) \\
&= \sum_{j\geq 0} P(X_n=j)E\left(z^{Y_1^{(n)}}\right)\cdots E\left(z^{Y_j^{(n)}}\right) \\
&= \sum_{j\geq 0} P(X_n=j)\left[E\left(z^{X_1}\right)\right]^n \\
&= g_{X_n}\left(g_{X_1}(z)\right),
\end{aligned}$$

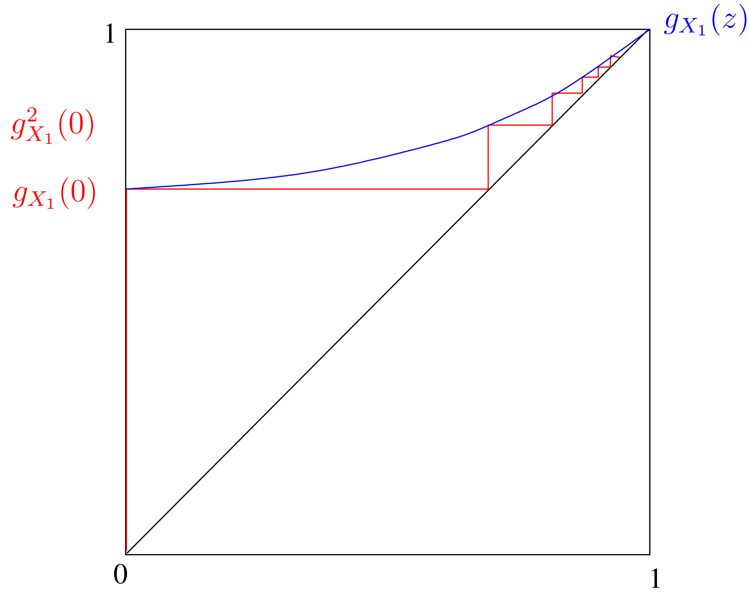
因此

$$g_{X_n}(z) = g_{X_1}^n(z), \qquad g_{X_1}^n = \underbrace{g_{X_1}\circ\cdots\circ g_{X_1}}_{n},$$

而且

$$P(X_n=0) = g_{X_n}(0) = g_{X_1}^n(0).$$





由于$g_{X_1}(z)=\sum\limits_{k\geq 0}P(X_1=k)z^k$在区间$[0,1]$上是单调不减函数列$z^n$的非负系数线性组合，所以它也是单调不减函数，于是对任何$z\in[0,1]$，

$$0\leq P(X_1=0)=g_{X_1}(0)\leq g_{X_1}(z)\leq g_{X_1}(1)=1,$$

所以$\{g^n_{X_1}(0)\}$是单调不减有上界的实数列，它收敛于g_{X_1}在区间$[0,1]$中最左边的那个不动点。

又由于$g_{X_1}(z)=\sum\limits_{k\geq 0}P(X_1=k)z^k$是凸函数序列$z^n$的凸组合，所以$g_{X_1}(z)$是凸函数，它在区间$[0,1]$上有且仅有以下三种可能

- $[0,1]$上到处都是g_{X_1}的不动点，即$g_{X_1}(z)\equiv z$。这当且仅当$P(X_1=1)=1$。在这种情形下，$P(X_n=0)=0$，所以这个家族任何一代中都会有男性成员。
- 恰好有两个不动点x^*（$0\leq x^*<1$）和1。这当且仅当$P(X_1=1)<1$且$EX_1>1$（EX_1是g_{X_1}在$z=1$处的切线斜率）。在这种情形下，$\lim\limits_{n\to+\infty}P(X_n=0)=x^*$，这时这个家族有$1-x^*$的概率可以保证任何一代中都有男性成员。
- 1是唯一不动点。这当且仅当$P(X_1=1)<1$且$EX_1\leq 1$。在这种情形下，$\lim\limits_{n\to+\infty}P(X_n=0)=1$，即这个家族几乎注定会断了香火。