

概率论与数理统计第三次习题课题目

题1 设随机变量 X 与 Y 独立, 均服从参数为1的指数分布, 求 $U = X + Y$, $V = \frac{X}{X+Y}$ 的联合概率密度函数, 并判断独立性。一般地, 考虑 X, Y 为独立Gamma分布(参数分别是 (α, λ) 和 (β, λ))随机变量的情形。

题2 设随机变量 X, Y 的联合概率密度函数为

$$f_{X,Y}(x,y) = \frac{1 + xy(x^2 - y^2)}{4}, \quad |x| \leq 1, |y| \leq 1.$$

求 $X + Y$ 的概率分布函数 F_{X+Y} 。

题3 设 X, Y 有联合概率密度函数 $f(x,y) = cxy$ ($0 \leq x \leq y \leq 2$)。

1. 计算常数 c 的值;
2. 分别求出 X, Y 的边缘概率密度函数;
3. 判断 X, Y 是否独立;
4. 对 $0 < y < 2$, 求在已知 $Y = y$ 的条件下, X 的条件概率密度函数, 以及条件数学期望 $E(X|Y = y)$;
5. 求 $EX, EY, \text{Var}(X), E(XY)$ 。

题4 设随机变量 X 与 Y 有联合概率密度函数 $f(x,y) = (1 + xy)/4$ ($|x| < 1, |y| < 1$)。

1. 分别求 X, Y 的边缘概率密度函数;
2. 判断 X, Y 是否独立;
3. 求 X^2, Y^2 的联合概率密度函数;
4. 判断 X^2, Y^2 是否独立;

题5 袋中装有 n 个黑球和 m 个白球, 每次从袋中取出一个球, 不放回, 再取, 直到取得白球时停止。记 X 表示取出的黑球的总数。求 X 的数学期望。(习题2.4.10是放回的情形)

题6 袋中有 r 种颜色的球, 第 i 种颜色的球有 N_i 个, $N = N_1 + \cdots + N_r$ 。现从中一次随机取出 n 个, 记 X_i 为取出的第 i 种颜色的球的个数。

1. 求 X_1, \dots, X_r 的联合概率分布列。
2. 设 $1 \leq s < r - 1$ 。求在已知 $X_1 = x_1, \dots, X_s = x_s$ (其中 $0 \leq x_i \leq N_i, x_1 + \cdots + x_s \leq n$)的条件下, X_{s+1}, \dots, X_r 的条件概率分布列。

题7 (Borel悖论) 设 X, Y 服从平面区域

$$D = \{(x,y) : 0 \leq y \leq 1, 0 \leq x + y \leq 1\}$$

上的均匀分布。

1. 求条件数学期望 $E(Y|X = 0)$ 的值。
2. 设 $U = X/Y$ 。求条件数学期望 $E(Y|U = 0)$ 的值。