概率论与数理统计第三次习题课题目解答

题1 设随机变量X与Y独立，均服从参数为1的指数分布，求$U = X + Y$，$V = \frac{X}{X+Y}$的联合概率密度函数，并判断独立性。一般地，考虑X, Y为独立Gamma分布（参数分别是(α, λ)和(β, λ)）随机变量的情形。

<u>解</u>：参数为1的指数分布相当于参数为$(1, 1)$的Gamma分布。所以我们直接考虑一般情形。由

$$\begin{cases} u &= x + y, \\ v &= \frac{x}{x+y}, \end{cases}$$

解得

$$\begin{cases} x &= uv, \\ y &= u - uv \end{cases}.$$

于是U, V的联合概率密度函数为

$$\begin{aligned} f_{U,V}(u, v) &= f_{X,Y}(x, y) \left| \det \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix} \right| \\ &= f_X(uv) f_Y(u - uv) \left| \det \begin{pmatrix} v & u \\ 1 - v & -u \end{pmatrix} \right| \\ &= \frac{\lambda^\alpha (uv)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} e^{-\lambda uv} I_{uv>0} \cdot \frac{\lambda^\beta (u - uv)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} e^{-\lambda(u-uv)} I_{u-uv>0} \cdot |u| \\ &= \frac{\lambda^{\alpha+\beta} u^{\alpha+\beta-1}}{\Gamma(\alpha+\beta)} e^{-\lambda u} I_{u>0} \cdot \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} v^{\alpha-1} (1 - v)^{\beta-1} I_{0<v<1}. \end{aligned} \tag{*}$$

注意到上式中，

$$\frac{\lambda^{\alpha+\beta} u^{\alpha+\beta-1}}{\Gamma(\alpha+\beta)} e^{-\lambda u} I_{u>0}$$

是参数为$(\alpha + \beta, \lambda)$的Gamma分布的概率密度函数，(*)式两端关于$u$在$(-\infty, +\infty)$上积分，得到

$$f_V(v) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{U,V}(u, v) du = \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} v^{\alpha-1} (1 - v)^{\beta-1} I_{0<v<1},$$

因此V服从参数为(α, β)的Beta分布。再对(*)两端关于v在$(-\infty, +\infty)$上积分，得到

$$f_U(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{U,V}(u, v) dv = \frac{\lambda^{\alpha+\beta} u^{\alpha+\beta-1}}{\Gamma(\alpha+\beta)} e^{-\lambda u} I_{u>0},$$

因此U服从参数为$(\alpha + \beta, \lambda)$的Gamma分布，并且$U, V$独立。

<u>注</u>：随机变量函数的概率密度公式有两个等价的表达式

$$f_{U,V}(u, v) = f_{X,Y}(x, y) \frac{1}{\left| \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} \right|} = f_{X,Y}(x, y) \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right|,$$

其中$\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)}$是二元函数$u(x, y)$和$v(x, y)$的导数（即Jacobi矩阵）的行列式（也称Jacobian）。第二个等号是因为原函数与反函数的导数是互逆的线性变换，而两个互逆的线性变换的行列式互为倒数。在实际问题中要视变换的形式选择其中一种方式确定概率密度函数。在我们这个例子里，我们选择了逆变换$x = uv, y = u - uv$，因为对它求导要比对原变换$u = x + y, v = x/(x + y)$求导简单。

题2 设随机变量X,Y的联合概率密度函数为

$$f_{X,Y}(x,y)=\frac{1+xy(x^2-y^2)}{4},\qquad |x|\le 1,|y|\le 1.$$

求$X+Y$的概率分布函数F_{X+Y}。

解法1:

$$\begin{aligned}
f_{X+Y}(u)&=\int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(u-v,v)dv\\
&=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1+(u-v)v[(u-v)^2-v^2]}{4}I_{|u-v|\le 1,|v|\le 1}dv\\
&=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1+(u-v)v[u^2-2uv]}{4}I_{u-1\le v\le 1+u,-1\le v\le 1}dv\\
&=I_{\max\{u-1,-1\}\le\max\{u+1,1\}}\int_{\max\{u-1,-1\}}^{\min\{u+1,1\}}\frac{1+(u-v)v[u^2-2uv]}{4}dv\\
&=I_{-2\le u\le 2}\int_{\frac{u}{2}-1+\left|\frac{u}{2}\right|}^{\frac{u}{2}+1-\left|\frac{u}{2}\right|}\frac{1+(u-v)v[u^2-2uv]}{4}dv\\
&=I_{-2\le u\le 2}\int_{-1+\left|\frac{u}{2}\right|}^{1-\left|\frac{u}{2}\right|}\frac{1-2u\left[\frac{u^2}{4}-w^2\right]w}{4}dw \qquad \left(\text{注意积分的对称性，令}w=v-\frac{u}{2}\right)\\
&=I_{-2\le u\le 2}\int_{-1+\left|\frac{u}{2}\right|}^{1-\left|\frac{u}{2}\right|}\frac{1}{4}dw\\
&=I_{-2\le u\le 2}\frac{2-|u|}{4}.
\end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned}
F_{X+Y}(z)=\int_{-\infty}^{z}f_{X+Y}(u)du&=\int_{-2}^{\min\{2,z\}}\frac{2-|u|}{4}du\\
&=I_{z\ge 2}+I_{-2\le z<2}\left(\frac{1}{2}+\int_0^z\frac{2-u\cdot\mathrm{sgn}(z)}{4}du\right)\\
&=I_{z\ge 2}+I_{-2\le z<2}\left(\frac{1}{2}+\frac{z}{2}-\frac{z^2\cdot\mathrm{sgn}(z)}{8}\right)\\
&=I_{z\ge 2}+I_{-2\le z<2}\left(\frac{1}{2}+\frac{z}{2}-\frac{z|z|}{8}\right).
\end{aligned}$$

解法2: 由于X,Y联合概率密度函数关于自变量(x,y)具有一定对称性，所以考虑对称的变量替换

$$\begin{cases} u &= x+y,\\ v &= x-y,\end{cases}$$

由此解得

$$\begin{cases} x &= (u+v)/2,\\ y &= (u-v)/2,\end{cases}$$

于是得到$U=X+Y$和$V=X-Y$的联合概率密度函数

$$\begin{aligned}f_{U,V}(u,v) &= f_{X,Y}\left(\frac{u+v}{2},\frac{u-v}{2}\right)\frac{1}{\left|\det\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}\right|}\\ &= \frac{1+\frac{u^2-v^2}{4}uv}{8}I_{\left|\frac{u+v}{2}\right|\le 1,\left|\frac{u-v}{2}\right|\le 1}.\end{aligned}$$

所以，

$$\begin{aligned}f_{X+Y}(u) = f_U(u) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_{U,V}(u,v)dv\\ &= \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1+\frac{u^2-v^2}{4}uv}{8}I_{|u+v|\le 2,|u-v|\le 2}dv\\ &= \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{8}I_{|u+v|\le 2,|u-v|\le 2}dv \qquad (\text{利用了积分的对称性})\\ &= \frac{1}{8}\int_{-\infty}^{+\infty} I_{-2+|u|\le v\le 2-|u|}dv\\ &= \frac{2-|u|}{4}I_{|u|\le 2}.\end{aligned}$$

然后，再象解法1中那样求出F_{X+Y}。

解法3：直接计算$X+Y$的概率分布函数

$$\begin{aligned}F_{X+Y}(z) &= P(X+Y\le z)\\ &= \iint\limits_{x+y\le z} f_{X,Y}(x,y)dxdy\\ &= \iint\limits_{\mathbb{R}^2}\frac{1+xy(x^2-y^2)}{4}I_{|x|\le 1,|y|\le 1,x+y\le z}dxdy\\ &= \frac{1}{4}\iint\limits_{\mathbb{R}^2} I_{|x|\le 1,|y|\le 1,x+y\le z}dxdy + \iint\limits_{\mathbb{R}^2}\frac{xy(x^2-y^2)}{4}I_{|x|\le 1,|y|\le 1,x+y\le z}dxdy\\ &= \frac{1}{4}\iint\limits_{\mathbb{R}^2} I_{|x|\le 1,|y|\le 1,x+y\le z}dxdy \qquad (\text{上式第2个积分关于}(x,y)\mapsto(y,x)\text{具有对称性})\\ &= I_{-2\le z<0}\frac{(z+2)^2}{8} + I_{0\le z<2}\left(1-\frac{(2-z)^2}{8}\right) + I_{z\ge 2}.\end{aligned}$$

这与前两个解法求得的F_{X+Y}是相同的。

题3 设X,Y有联合概率密度函数$f(x,y)=cxy$（$0\le x\le y\le 2$）。

1. 计算常数c的值；
2. 分别求出X,Y的边缘概率密度函数；
3. 判断X,Y是否独立；
4. 对$0<y<2$，求在已知$Y=y$的条件下，X的条件概率密度函数，以及条件数学期望$E(X|Y=y)$；

5. 求$EX, EY, \mathrm{Var}(X), E(XY)$。

<u>**解**</u>：先求Y的边缘概率密度函数

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,y)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} cxyI_{0\le x\le y\le x}dx = I_{0\le y\le 2}\int_0^y cxydx = \frac{cy^3}{2}I_{0\le y\le 2}.$$

再由

$$1 = \int_{-\infty}^{+\infty} f_Y(y)dy = \int_0^2 \frac{cy^3}{2}dy = \frac{c\times 2^4}{8}$$

得到$c = 1/2$，因此

$$f_{X,Y} = \frac{xy}{2}I_{0\le x\le y\le 2}, \qquad f_Y(y) = \frac{y^3}{4}I_{0\le y\le 2}.$$

X的边缘概率密度函数为

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,y)dy \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{xy}{2}I_{0\le x\le y\le 2}dy \\ &= \frac{x}{2}I_{0\le x\le 2}\int_x^2 ydy \\ &= \frac{x}{2}\left(2-\frac{x^2}{2}\right)I_{0\le x\le 2} \\ &= \frac{x(4-x^2)}{4}I_{0\le x\le 2}. \end{aligned}$$

由于$f_{X,Y}(x,y), f_X(x), f_Y(y)$在区域

$$\{(x,y): 0<y<x<2\}$$

上连续，而在此区域上

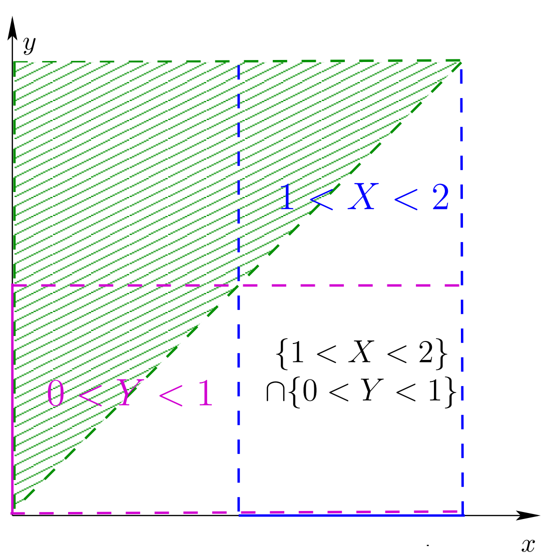
$$f_{X,Y}(x,y) = 0 < f_X(x)f_Y(y),$$

所以X, Y不独立。

另外，我们也可以通过

$$P(X\in(1,2), Y\in(0,1)) = 0 < P(X\in(1,2))P(Y\in(0,1))$$

来说明X, Y不独立。



根据定义，在已知$Y=y$（$0<y<2$）的条件下，Y的条件概率密度函数为

$$f_{X|Y}(x|y)=\frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)}=\frac{\frac{xy}{2}I_{0\le x\le y\le 2}}{\frac{y^3}{4}}=\frac{2x}{y^2}I_{0\le x\le y},\quad 0<y<2.$$

由此得到条件数学期望

$$E(X|Y=y)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf_{X|Y}(x|y)dy=\int_0^y\frac{2x^2}{y^2}dx=\frac{2y}{3},\quad 0<y<2.$$

用定义可求得

$$EX=\frac{16}{15},\quad EY=\frac{8}{5}.$$

而

$$EX^2=\int_0^2 x^2\left(x-\frac{x^3}{4}\right)dx=\frac{4}{3},$$

所以

$$\mathrm{Var}X=EX^2-(EX)^2=\frac{44}{225}.$$

而

$$E(XY)=\iint\limits_{0\le x\le y\le 2}xy\frac{xy}{2}dxdy=\int_0^2\left(\int_0^y\frac{x^2y^2}{2}dx\right)dy=\frac{16}{9}.$$

我们也可以利用全期望公式计算EX、EX^2和$E(XY)$。

$$EX=E(E(X|Y))=\int_{-\infty}^{+\infty}E(X|Y=y)f_Y(y)dy=\int_0^2\frac{2y}{3}\cdot\frac{y^3}{4}dy=\int_0^2\frac{y^4}{6}dy=\frac{2^5}{30}=\frac{16}{15},$$

$$EX^2=E(E(X^2|Y))=\int_{-\infty}^{+\infty}E(X^2|Y=y)f_Y(y)dy=\int_0^2\frac{y^2}{2}\cdot\frac{y^3}{4}dy=\int_0^2\frac{y^5}{8}dy=\frac{2^6}{48}=\frac{4}{3},$$

$$\begin{aligned}E(XY)&=E(E(XY|Y))=E(Y\cdot E(X|Y))=\int_{-\infty}^{+\infty}yE(X|Y=y)f_Y(y)dy\\&=\int_0^2\frac{2y^2}{3}\cdot\frac{y^3}{4}dy=\int_0^2\frac{y^5}{6}dy=\frac{16}{9}.\end{aligned}$$

注：这是个很基本的题目，也没太多变化。但许多同学一上来就先用联合概率密度函数在全平面的二重积分为1确定c的值，再分别计算两个边缘分布。细心的同学会发现这样就要计算四次积分，而其中有两次几乎是重复的。我们上面给出的做法只要算三次积分。这虽不是什么本质问题，但做好统筹规划提高计算效率也是值得注意的。

题4 设随机变量X与Y有联合概率密度函数$f(x,y)=(1+xy)/4$（$|x|<1,|y|<1$）。

1. 分别求X,Y的边缘概率密度函数；
2. 判断X,Y是否独立；
3. 求X^2,Y^2的联合概率密度函数；
4. 判断X^2,Y^2是否独立；

解：先求X的边缘概率密度函数

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,y)dy \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1+xy}{4} I_{|x|<1,|y|<1} dy \\ &= I_{|x|<1} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{4} I_{|y|<1} dy \\ &= \frac{1}{2} I_{|x|<1}. \end{aligned}$$

由联合概率密度函数的对称性，Y的边缘概率密度函数为

$$f_Y(y) = \frac{1}{2} I_{|y|<1}.$$

由于

$$f_{X,Y}(x,y) \neq f_X(x) f_Y(y),$$

所以X,Y不独立。

我们也可以利用

$$P(X \in (-1,0), Y \in (0,1)) - P(X \in (-1,0)) P(Y \in (0,1)) = \iint_{-1<x<0<y<1} \frac{xy}{4} dxdy < 0$$

来说明X,Y不独立。

令

$$U = X^2, \quad V = Y^2.$$

由于

$$\{(u,v) : uv = 0\}$$

是(x,y)平面中的两条直线，所以我们只需在区域

$$\{(u,v) : u > 0, v > 0\}$$

中来确定(U,V)的联合概率密度函数，而在这个区域中，每个(u,v)有四个原像

$$\{(x,y) : x^2 = u, y^2 = v\} = \{(\sqrt{u}, \sqrt{v}), (\sqrt{u}, -\sqrt{v}), (-\sqrt{u}, \sqrt{v}), (-\sqrt{u}, -\sqrt{v})\}.$$

在每个原像附近，映射$(x,y) \mapsto (x^2, y^2)$有唯一的反函数（表达式由上式右端给出）。在任何一个原像处

$$\left| \frac{\partial u, v}{\partial(x,y)} \right| = \left| \det \begin{pmatrix} 2x & 0 \\ 0 & 2y \end{pmatrix} \right| = 4|xy| = 4\sqrt{uv} > 0,$$

于是

$$\begin{aligned} f_{U,V}(u,v) &= \sum_{x^2=u, y^2=v} f_{X,Y}(x,y) \frac{1}{\left| \frac{\partial u, v}{\partial(x,y)} \right|} \\ &= f_{X,Y}(\sqrt{u}, \sqrt{v}) \frac{1}{4\sqrt{uv}} + f_{X,Y}(\sqrt{u}, -\sqrt{v}) \frac{1}{4\sqrt{uv}} \\ &\qquad + f_{X,Y}(-\sqrt{u}, \sqrt{v}) \frac{1}{4\sqrt{uv}} + f_{X,Y}(-\sqrt{u}, -\sqrt{v}) \frac{1}{4\sqrt{uv}} \\ &= \frac{1}{4\sqrt{uv}} I_{0<u<1, 0<v<1} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{u}} I_{0<u<1} \cdot \frac{1}{2\sqrt{v}} I_{0<v<1}. \end{aligned}$$

由U,V的联合概率密度函数得到

$$f_U(u)=\frac{1}{2\sqrt{u}}I_{0<u<1}C,$$

其中

$$C=\int_0^1\frac{1}{2\sqrt{v}}dv.$$

再将$f_U(u)$对u积分，得到

$$1=C^2,$$

所以$C=1$，于是

$$f_U(u)=\frac{1}{2\sqrt{u}}I_{0<u<1}.$$

同理可得

$$f_V(v)=\frac{1}{2\sqrt{v}}I_{0<v<1}.$$

所以U,V独立。

计算(U,V)的联合概率密度函数的另一个方法是先计算它们的联合概率分布函数

$$\begin{aligned}
F_{U,V}(u,v)&=P(U\le u,V\le v)=P(X^2\le u,Y^2\le v)\\
&=I_{u\ge0,v\ge0}P(-\sqrt{u}\le X\le\sqrt{u},-\sqrt{v}\le Y\le\sqrt{v})\\
&=I_{u\ge0,v\ge0}\int_{-\sqrt{u}}^{\sqrt{u}}\int_{-\sqrt{v}}^{\sqrt{v}}\frac{1+xy}{4}I_{|x|<1,|y|<1}dydx\\
&=I_{u\ge0,v\ge0}\int_{\max\{-1,-\sqrt{u}\}}^{\min\{1,\sqrt{u}\}}\int_{\max\{-1,-\sqrt{v}\}}^{\min\{1,\sqrt{v}\}}\frac{1+xy}{4}dydx\\
&=I_{u\ge0,v\ge0}\int_{\max\{-1,-\sqrt{u}\}}^{\min\{1,\sqrt{u}\}}\int_{\max\{-1,-\sqrt{v}\}}^{\min\{1,\sqrt{v}\}}\frac{1}{4}dydx\qquad(\text{注意积分区域和被积函数的对称性})\\
&=I_{u\ge0,v\ge0}\int_0^{\min\{1,\sqrt{u}\}}\int_0^{\min\{1,\sqrt{v}\}}dydx\qquad(\text{注意积分区域和被积函数的对称性})\\
&=\min\{1,\sqrt{u}\}I_{u\ge0}\cdot\min\{1,\sqrt{v}\}I_{v\ge0}\\
&=\begin{cases}1, & \text{若}u\ge1\text{且}v\ge1;\\ \sqrt{u}, & \text{若}0\le u<1\text{且}v\ge1;\\ \sqrt{v}, & \text{若}u\ge1\text{且}0\le v<1;\\ \sqrt{uv}, & \text{若}0\le u<1\text{且}0\le v<1;\\ 0, & \text{若}u<0\text{或}v<0\text{。}\end{cases}
\end{aligned}$$

由此得到U,V的边缘概率分布函数

$$F_U(u)=F_{U,V}(u,+\infty)=\lim_{v\to+\infty}\min\{1,\sqrt{u}\}I_{u\ge0}\cdot\min\{1,\sqrt{v}\}I_{v\ge0}=\min\{1,\sqrt{u}\}I_{u\ge0},$$
$$F_V(v)=F_{U,V}(+\infty,v)=\lim_{u\to+\infty}\min\{1,\sqrt{u}\}I_{u\ge0}\cdot\min\{1,\sqrt{v}\}I_{v\ge0}=\min\{1,\sqrt{v}\}I_{v\ge0}.$$

由此得到U,V的边缘概率密度函数

$$f_U(u)=\frac{dF_U(u)}{du}=\frac{d}{du}\left(I_{u\ge1}+I_{0\le u<1}\sqrt{u}\right)=I_{0<u<1}\frac{1}{2\sqrt{u}},$$
$$f_V(u)=\frac{dF_V(v)}{dv}=\frac{d}{dv}\left(I_{v\ge1}+I_{0\le v<1}\sqrt{v}\right)=I_{0<v<1}\frac{1}{2\sqrt{v}},$$

由U,V的联合概率分布函数及边缘概率分布函数知

$$F_{U,V}(u,v)=F_U(u)F_V(v),\quad \forall u,v,$$

即U,V独立，故

$$f_{U,V}(u,v)=f_U(u)f_V(v)=\frac{I_{0<u<1,0<v<1}}{4\sqrt{uv}}.$$

题5 袋中装有n个黑球和m个白球，每次从袋中取出一个球，不放回，再取，直到取得白球时停止。记X表示取出的黑球的总数。求X的数学期望。（习题2.4.10是放回的情形）

解法1a：先求X的概率分布列，对$k=0,1,2,\ldots,n$，$X=k$即前k次皆得黑球唯第$k+1$次取得白球，于是用乘法公式

$$P(X=k)=\frac{n}{m+n}\cdot\frac{n-1}{m+n-1}\cdots\frac{n-(k-1)}{m+n-(k-1)}\cdot\frac{m}{m+n-k}=\frac{m}{m+n}\cdot\frac{\binom{n}{k}}{\binom{m+n-1}{k}}.$$

于是

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{m}{m+n}\cdot\frac{\binom{n}{k}}{\binom{m+n-1}{k}}=1.$$

从而

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{\binom{n}{k}}{\binom{m+n-1}{k}}=\frac{m+n}{m}.\tag{*}$$

我们计算$n-X$的数学期望

$$\begin{aligned}E(n-X)&=\sum_{k=0}^{n}(n-k)P(X\ge k)=\sum_{k=0}^{n-1}(n-k)\frac{m}{m+n}\cdot\frac{\binom{n}{k}}{\binom{m+n-1}{k}}\\&=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{mn}{m+n}\times\frac{\binom{n-1}{k}}{\binom{m+n-1}{k}}\\&=\frac{mn}{m+n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\binom{n-1}{k}}{\binom{(m+1)+(n-1)-1}{k}}\\&=\frac{mn}{m+n}\times\frac{(m+1)+(n-1)}{m+1}=\frac{mn}{m+1}.\qquad\text{(这里利用了(*)型等式)}\end{aligned}$$

所以，$EX=n-E(n-X)=\frac{n}{m+1}$。

解法1b：类似解法1a求得X的分布列以及恒等式(*)。

另外，$X\ge k$即前k次皆得黑球，于是用乘法公式

$$P(X\ge k)=\frac{n}{m+n}\cdot\frac{n-1}{m+n-1}\cdots\frac{n-(k-1)}{m+n-(k-1)}=\frac{\binom{n}{k}}{\binom{m+n}{k}},\quad k=0,1,\ldots,n.$$

而当$k>n$时，$P(X\ge k)=0$。

由于X是取非负整数值的随机变量，所以

$$\begin{aligned}EX&=\sum_{k=1}^{\infty}P(X\ge k)=\sum_{k=1}^{n}\frac{\binom{n}{k}}{\binom{m+n}{k}}\\&=\sum_{k=0}^{n}\frac{\binom{n}{k}}{\binom{m+n}{k}}-1=\frac{m+n+1}{m+1}-1=\frac{n}{m+1}.\qquad\text{(这里利用了(*)型等式)}\end{aligned}$$

解法1c[由刘天强、王赟、邢斌、张晨光等同学提供]：与解法1类似求得

$$P(X \geq k) = \frac{n}{m+n} \cdot \frac{n-1}{m+n-1} \cdots \frac{n-(k-1)}{m+n-(k-1)} = \frac{\binom{m+n-k}{m}}{\binom{m+n}{m}}, \quad k = 0, 1, \ldots, n.$$

而当$k > n$时，$P(X \geq k) = 0$。由于X是取非负整数值的随机变量，所以

$$\begin{aligned}
EX &= \sum_{k=1}^{\infty} P(X \geq k) = \frac{1}{\binom{m+n}{m}} \sum_{k=1}^{n} \binom{m+n-k}{m} \\
&= \frac{1}{\binom{m+n}{m}} \left[\binom{m+1}{m+1} + \binom{m+1}{m} + \binom{m+2}{m} + \cdots + \binom{m+n-1}{m} \right] \\
&= \frac{1}{\binom{m+n}{m}} \left[\binom{m+2}{m+1} + \binom{m+2}{m} + \cdots + \binom{m+n-1}{m} \right] \\
&\vdots \\
&= \frac{1}{\binom{m+n}{m}} \left[\binom{m+n-1}{m+1} + \binom{m+n-1}{m} \right] \\
&= \frac{1}{\binom{m+n}{m}} \binom{m+n}{m+1} \\
&= \frac{n}{m+1}.
\end{aligned}$$

刘天强同学给出的做法本质上是直接利用数学归纳法证明以下组合恒等式

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{m+k}{m} = \binom{m+n+1}{m+1}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots. \tag{*}$$

王赟同学形象地给出了这个组合恒等式在二项式系数的杨辉三角形（西方文献称为Pascal三角形）中的直观意义，利用这个组合恒等式，他还计算了EX^2，从而得到了X的方差。对非负整数取值的随机变量X，

$$\begin{aligned}
EX^2 &= \sum_{k=0}^{\infty} P(X^2 > k) \\
&= \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{k=i^2}^{(i+1)^2-1} P(X > \sqrt{k}) = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{k=i^2}^{(i+1)^2-1} P(X > i) \\
&= \sum_{i=0}^{\infty} [(i+1)^2 - i^2] P(X > i) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} [(2i-1] P(X \geq k) = 2 \sum_{k=1}^{\infty} k P(X \geq k) - EX,
\end{aligned}$$

而在我们当前的问题中

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} k P(X \geq k) &= \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{k} P(X \geq k) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=j}^{n} P(X \geq k) \\
&= \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=j}^{n} \frac{\binom{m+n-k}{m}}{\binom{m+n}{m}} = \frac{1}{\binom{m+n}{m}} \sum_{j=1}^{n} \binom{m+n-j+1}{m+1} \\
&= \frac{\binom{m+n+1}{m+2}}{\binom{m+n}{m}} = \frac{n(m+n+1)}{(m+1)(m+2)}.
\end{aligned}$$

由此可得方差

$$\mathrm{Var}X=\frac{mn(m+n+1)}{(m+1)^2(m+2)}.$$

<u>**解法1d**</u>[由同学提供]：首先求得X的概率分布列

$$\begin{aligned}P(X=k)&=\frac{n}{m+n}\cdot\frac{n-1}{m+n-1}\cdots\frac{n-(k-1)}{m+n-(k-1)}\cdot\frac{m}{m+n-k}\\&=\frac{\binom{m+n-k-1}{m-1}}{\binom{m+n}{m}},\qquad k=0,1,\ldots,n.\end{aligned}$$

（注：我们从上述概率分布列得到恒等式

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{m+n-k-1}{m-1}=\binom{m+n}{m},$$

即

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{m-1+k}{m-1}=\binom{m+n}{m},$$

也就是解法1c中的等式(*)。）

我们希望按定义计算EX。

$$\begin{aligned}EX&=\sum_{k=0}^{n}kP(X=k)=\sum_{k=0}^{n}kP(X=k)\\&=\frac{1}{\binom{m+n}{m}}\sum_{k=0}^{n}k\binom{m+n-k-1}{m-1}.\end{aligned}$$

为了计算

$$S=\sum_{k=1}^{n}k\binom{m+n-k-1}{m-1}$$

的值，我们考虑x的多项式

$$A=\sum_{k=0}^{n}k(1+x)^{m+n-k-1}.$$

将这个多项式中的每一项都用Newton二项式展开，再合并同类项，我们发现x^{m-1}的系数正是

$$S=\sum_{k=1}^{n}k\binom{m+n-k-1}{m-1}.$$

下面我们将A改写成其他形式，再来看x^{m-1}的系数。我们考虑

$$\begin{aligned}Ax^2&=x\left[A(1+x)-A\right]\\&=x\left[\sum_{k=0}^{n}k(1+x)^{m+n-k}-\sum_{j=0}^{n}j(1+x)^{m+n-j-1}\right]\\&=x\left[\sum_{k=1}^{n}(1+x)^{m+n-k}-n(1+x)^{m-1}\right]\\&=(1+x)^{m+n}-(1+x)^{m}-nx(1+x)^{m-1}.\end{aligned}$$

从而S是多项式Ax^2展开式中x^{m+1}的系数，即

$$S=\binom{m+n}{m+1}.$$

因此

$$EX=\frac{\binom{m+n}{m+1}}{\binom{m+n}{m}}=\frac{n}{m+1}.$$

解法2[由赵刚同学提供]：不难发现

$$P(X=k)=P(X\geq k)\frac{m}{m+n-k},\quad k=1,\ldots,n.$$

而当$k>n$时，$P(X\geq k)=0$。由于X是取非负整数值的随机变量，所以

$$\begin{aligned}EX&=\sum_{k=1}^{\infty}P(X\geq k)=\sum_{k=1}^{n}\frac{m+n-k}{m}P(X=k)\\&=\frac{m+n}{m}\sum_{k=1}^{n}P(X\geq k)-\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{\infty}kP(X=k)\\&=\frac{m+n}{m}\big[1-P(X=0)\big]-\frac{1}{m}EX\\&=\frac{m+n}{m}\left[1-\frac{m}{m+n}\right]-\frac{1}{m}EX,\end{aligned}$$

所以，

$$EX=\frac{n}{m}\cdot\frac{m}{m+1}=\frac{n}{m+1}.$$

解法3[由付尧生、赵刚、周戈林同学提供]：记$X_{m,n}$为从最初装有m个白球和n个黑球的袋子里不放回取球至取得白球时取出的黑球总数。记A表示事件“第一次取球得到白球”。

$$\begin{aligned}EX_{m,n}&=\sum_k kP(X_{m,n}=k)\\&=\sum_k k\big[P(A)P(X_{m,n}=k|A)+P(A^c)P(X_{m,n}=k|A_c)\big]\qquad(\text{全概率公式})\\&=P(A)\sum_k kP(X_{m,n}=k|A)+P(A^c)\sum_k kP(X_{m,n}=k|A_c)\\&=P(A)E(X_{m,n}|A)+P(A^c)E(X_{m,n}|A_c)\qquad(\text{这就是全期望}E(E(X_{m,n|I_A})))\\&=\frac{m}{m+n}\times 0+\frac{n}{m+n}\times[1+EX_{m,n-1}].\end{aligned}$$

这是因为，在已知A发生（第一次就取到白球）时，取到黑球的个数$X_{m,n}$恒为零，所以$E(X_{m,n}|A)=0$；而在已知A未发生（第一次取到一个黑球）时，$X_{m,n}-1$是除了第一个黑球以外还要取出的黑球个数，这相当于从m个白球和$n-1$个黑球的袋中进行不放回取球直至取得白球时取出的黑球个数，这时$X_{m,n}-1$的条件概率分布相当于$X_{m,n-1}$的概率分布，所以

$$E(X_{m,n}-1|A^c)=EX_{m,n-1}.$$

我们知道，如果袋中最初没有黑球，那么第一次必然驱动白球，从而

$$EX_{m,0}=0.$$

将它带入递推关系

$$EX_{m,n} = \frac{n}{m+n} EX_{m,n-1} + \frac{n}{m+n}$$

得到

$$EX_{m,1} = \frac{1}{m+1},$$

再由递推关系得到

$$EX_{m,2} = \frac{2}{m+2} \cdot \frac{1}{m+1} + \frac{2}{m+2} = \frac{2}{m+1}.$$

我们可以用数学归纳法证明，对一切非负整数n，

$$EX_{m,n} = \frac{n}{m+1}.$$

题6 袋中有r种颜色的球，第i种颜色的球有N_i个，$N = N_1 + \cdots + N_r$。现从中一次随机取出n个，记X_i为取出的第i种颜色的球的个数。

1. 求$X_1, \ldots, X_r$的联合概率分布列。
2. 设$1 \le s < r-1$。求在已知$X_1 = x_1, \ldots, X_s = x_s$（其中$0 \le x_i \le N_i$，$x_1 + \cdots + x_s \le n$）的条件下，$X_{s+1}, \ldots, X_r$的条件概率分布列。

$$P(X_1 = x_1, \ldots, X_r = x_r) = \frac{\binom{N_1}{x_1} \cdots \binom{N_r}{x_r}}{\binom{N_1 + \cdots + N_r}{n}},$$

其中$x_1, \ldots, x_r$是非负整数，满足$x_1 + \cdots + x_r = n$。

由此得到$X_1, \ldots, X_s$的边缘概率分布列

$$\begin{aligned}
P(X_1 = x_1, \ldots, X_s = x_s) &= \sum_{x_{s+1},\ldots x_r \ge 0, x_{s+1}+\cdots+x_r = n-x_1-\cdots-x_s} P(X_1 = x_1, \ldots, X_r = x_r) \\
&= \sum_{x_{s+1},\ldots x_r \ge 0, x_{s+1}+\cdots+x_r = n-x_1-\cdots-x_s} \frac{\binom{N_1}{x_1} \cdots \binom{N_r}{x_r}}{\binom{N_1+\cdots+N_r}{n}} \\
&= \frac{\binom{N_1}{x_1} \cdots \binom{N_s}{x_s} \binom{N_{s+1}+\cdots+N_r}{n-x_1-\ldots-x_s}}{\binom{N_1+\cdots+N_r}{n}} \sum_{x_{s+1},\ldots x_r \ge 0, x_{s+1}+\cdots+x_r = n-x_1-\cdots-x_s} \frac{\binom{N_{s+1}}{x_{s+1}} \cdots \binom{N_r}{x_r}}{\binom{N_{s+1}+\cdots+N_r}{n-x_1-\cdots-x_s}} \\
&= \frac{\binom{N_1}{x_1} \cdots \binom{N_s}{x_s} \binom{N_{s+1}+\cdots+N_r}{n-x_1-\ldots-x_s}}{\binom{N_1+\cdots+N_r}{n}}.
\end{aligned}$$

在已知$X_1 = x_1, \ldots, X_s = x_s$时，$X_{s+1}, \ldots, X_r$的条件概率分布列为

$$\begin{aligned}
P(X_{s+1} = x_{s+1}, \ldots, X_r = x_r) &= \frac{P(X_1 = x_1, \ldots, X_r = x_r)}{P(X_1 = x_1, \ldots, X_s = x_s)} \\
&= \frac{\binom{N_{s+1}}{x_{s+1}} \cdots \binom{N_r}{x_r}}{\binom{N_{s+1}+\cdots+N_r}{x_{s+1}+\cdots+x_r}}.
\end{aligned}$$

因此多维超几何分布的边缘分布和条件分布都是（多维）超几何分布。

题7 （Borel悖论）设X, Y服从平面区域

$$D = \{(x, y) : 0 \le y \le 1, 0 \le x + y \le 1\}$$

上的均匀分布。

1. 求条件数学期望$E(Y|X=0)$的值。
2. 设$U=X/Y$。求条件数学期望$E(Y|U=0)$的值。

1、由X,Y的联合概率密度函数

$$f_{X,Y}(x,y)=I_{0\le y\le 1,0\le x+y\le 1}$$

得到X的边缘概率密度函数

$$\begin{aligned}f_X(x)&=\int_{-\infty}^{+\infty} I_{0\le y\le 1,-x\le y\le 1-x}dy=I_{1\ge -x,1-x\ge 0}\int_{\max\{0,-x\}}^{\min\{1,1-x\}}dy\\&=I_{-1\le x\le 1}\left[\min\{1,1-x\}-\max\{0,-x\}\right]=I_{-1\le x\le 1}\left[1+\min\{0,-x\}+\min\{0,x\}\right]\\&=I_{-1\le x\le 1}\left[1+\min\{0,-x,x\}\right]=I_{-1\le x\le 1}(1-|x|).\end{aligned}$$

$f_X(x)$在$x=0$连续，且$f_X(0)=1$，所以

$$f_{Y|X}(y|0)=\frac{f_{X,Y}(0,y)}{f_X(0)}=I_{0\le y\le 1},$$

因此

$$E(Y|X=0)=\int_0^1 ydy=\frac{1}{2}.$$

2、我们求U,Y的联合概率密度函数

$$f_{U,Y}(u,y)=f_{X,Y}(uy,y)\left|\det\begin{pmatrix}y & u\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right|=I_{0<y\le 1,0\le uy+y\le 1}|y|=yI_{0<y\le 1,0\le uy+y\le 1},$$

由此，计算U的边缘概率密度函数

$$\begin{aligned}f_U(u)&=I_{1+u\ge 0}\int_{-\infty}^{+\infty} yI_{0<y\le 1,0\le y\le \frac{1}{1+u}}dy=I_{u\ge -1}\int_0^{\min\{1,\frac{1}{1+u}\}} ydy\\&=\frac{1}{2}I_{u\ge -1}\min\left\{1,\frac{1}{(1+u)^2}\right\},\end{aligned}$$

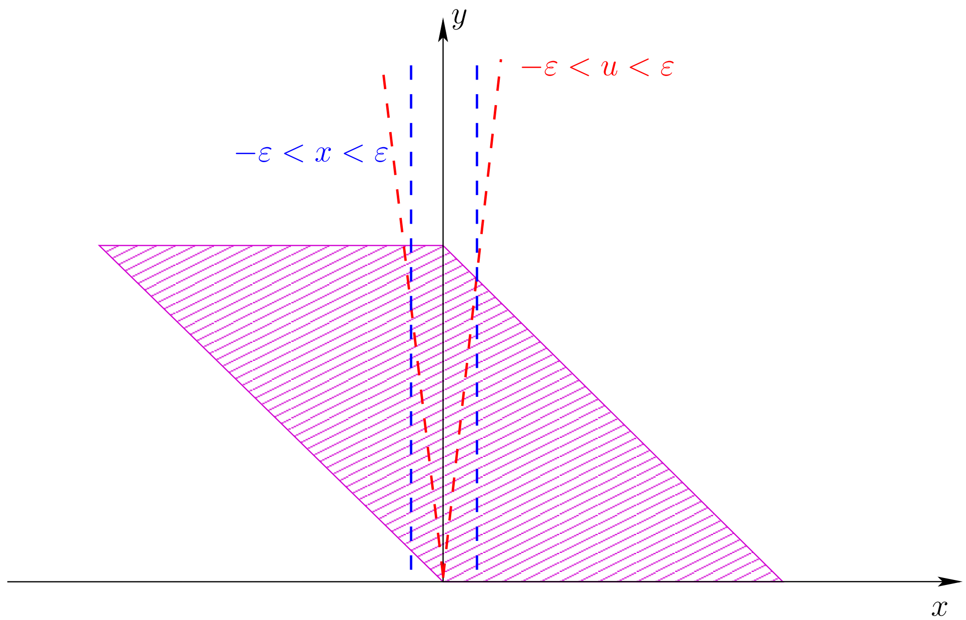
$f_U(u)$在$u=0$连续，且$f_U(0)=\frac{1}{2}$，所以

$$f_{Y|U}(y|0)=\frac{f_{U,Y}(0,y)}{f_U(0)}=2yI_{0\le y\le 1},$$

因此

$$E(Y|U=0)=\int_0^1 y\cdot 2ydy=\frac{2}{3}.$$

虽然事件$\{X=0\}$和$\{U=0\}$是同一个事件，但是Y的上述条件数学期望的值却不相等，这个例子被称为Borel悖论。造成这个现象的原因$\{X=0\}$和$\{U=0\}$都是零概率事件。对一个零概率事件A，我们用一列正概率事件A_n逼近A，如果条件概率值$P(B|A_n)$的极限$\lim_{n\to\infty}P(B|A_n)$存在，那么我们把这个极限值定义为$P(B|A)$。上面这个例子表明，$P(B|A)$是依赖于$A_n$的选取方式的。下图说明了在$E(Y|X=0)$和$E(Y|U=0)$的计算中涉及的不同的取极限的途径。


y
$-\varepsilon < u < \varepsilon$
$-\varepsilon < x < \varepsilon$
x