概率论与数理统计第二次习题课题目

题1 设连续型随机变量X的分布函数为:

$$F(x) = \begin{cases} Ae^x, & x < 0; \\ B, & 0 \le x < 1; \\ 1 - Ae^{-(x-1)}, & x \ge 1. \end{cases}$$

求：(a) A、B的值。(b) X的密度函数。(c) $P(X > 1/3)$的值。(d) X的数学期望和方差。

题2 设随机变量X服从$(-\pi/2, \pi/2)$上的均匀分布。
求：(a) 随机变量$Y = \cos X$的概率密度函数。(b) Y的数学期望和方差。

题3 设随机变量U服从$[0,1]$上的均匀分布，函数$F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 满足以下三个条件

1. 对任何$x \in \mathbb{R}$，$F(-\infty) = 0 \le F(x) \le 1 = F(+\infty)$；
2. F单调不减；
3. F在所有$x \in \mathbb{R}$处都是右连续的。

证明：

1. 如果F连续且严格单调增，则随机变量$X = F^{-1}(U)$的概率分布函数就是F；
2. 一般情况下，即F不严格单调增或在某些x处不连续时，随机变量

$$X = \inf\{x \in \mathbb{R} | F(x) \ge U\}$$

的概率分布函数就是F 。

题4 设随机变量(X, Y)有联合概率密度函数$f(x, y) = cxy$（$0 \le x \le y \le 2$）。计算常数c ，并判断X与Y是否独立。

题5 设随机变量X与Y有联合概率密度函数$f(x, y) = (1+xy)/4$（$|x| < 1, |y| < 1$）。证明：X与Y不独立，但是X^2与Y^2相互独立。

题6 袋中装有N个球，其中白球数为随机变量，设为X，已知$EX = n$（n可以不是整数）。证明从该袋中摸出一球为白球的概率是n/N。并用这个结论解决习题1.4.26。

题7 若一个离散型随机变量X在某个点上的概率达到最大，则称该点为“众数”(mode)。分别求二项分布、泊松分布和负二项分布的众数。

题8 求实数c使$E|X - c|$达到最小。一般地，对$0 < p < 1$，求实数c使得

$$E\big[p \max\{X - c, 0\} - (1 - p) \min\{X - c, 0\}\big]$$

达到最小。

题9 设随机变量X服从参数为λ的泊松分布，试导出X的k阶原点矩的递推公式，并由此求出X的二阶、三阶、四阶原点矩及中心矩。