概率论与数理统计第二次习题课题目解答

题1 设连续型随机变量X的分布函数为:

$$F(x)=\begin{cases}Ae^{x}, & x<0;\\ B, & 0\le x<1;\\ 1-Ae^{-(x-1)}, & x\ge 1.\end{cases}$$

求：(a) A、B的值。(b) X的密度函数。(c) $P(X>1/3)$的值。(d) X的数学期望和方差。

解：(a) 因为X是连续型随机变量，所以它的概率分布函数处处连续，特别是在$x=0$和$x=1$两处，连续性意味着

$$A=\lim_{x\nearrow 0}F(x)=\lim_{x\searrow 0}F(x)=B,\quad B=\lim_{x\nearrow 1}F(x)=\lim_{x\searrow 1}F(x)=1-A,$$

由此解得$A=B=1/2$。

(b) X的概率密度函数为

$$f(x)=F'(x)=Ae^{x}I_{x<0}+Ae^{-(x-1)}I_{x>1}=\frac{e^{x}I_{x<0}+e^{-(x-1)}I_{x>1}}{2}$$

(c) 直接利用概率分布函数

$$P(X>1/3)=1-F(1/3)=1-B=0.5.$$

或者利用概率密度函数

$$\begin{aligned}P(X>1/3)&=\int_{1/3}^{+\infty}f(x)dx=\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\frac{e^{x}I_{x<0}+e^{-(x-1)}I_{x>1}}{2}\right]\times I_{x>1/3}dx\\&=\frac{1}{2}\int_{1}^{+\infty}e^{-(x-1)}dx=\frac{1}{2}\int_{0}^{+\infty}e^{-y}dy=0.5.\end{aligned}$$

(d)

$$\begin{aligned}EX&=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx\\&=\int_{-\infty}^{+\infty}x\left[\frac{e^{x}I_{x<0}+e^{-(x-1)}I_{x>1}}{2}\right]dx\\&=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{0}xe^{x}dx+\frac{1}{2}\int_{1}^{+\infty}xe^{-(x-1)}dx\\&=-\frac{1}{2}\int_{0}^{+\infty}ye^{-y}dy+\frac{1}{2}\int_{0}^{+\infty}(y+1)e^{-y}dy\\&=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times 2=\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

类似地，可以计算EX^2，但是我们注意到X的概率密度函数关于$x=0.5$对称，即

$$f(0.5-x)=f(0.5+x),\quad \forall x,$$

所以

$$\begin{aligned}
EX^2 &= \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} (y+0.5)^2 f(y+0.5)dy \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \left[y^2+y+\frac{1}{4}\right] f(y+0.5)dy \\
&= 2\int_{0}^{+\infty} \left[y^2+\frac{1}{4}\right] \frac{e^{y+0.5}I_{y<-0.5}+e^{0.5-y}I_{y>0.5}}{2}dy \\
&= \int_{0.5}^{+\infty} \left[y^2+\frac{1}{4}\right] e^{0.5-y}dy \\
&= \int_{0}^{+\infty} \left[(u+0.5)^2+\frac{1}{4}\right] e^{-u}du \\
&= \int_{0}^{+\infty} \left[u^2+u+\frac{1}{2}\right] e^{-u}du \\
&= -u^2e^{-u}\Big|_0^{+\infty} + 2\int_{0}^{+\infty} ue^{-u}du + 1 + 0.5 \\
&= 2+1+0.5 = \frac{7}{2}.
\end{aligned}$$

从而

$$\mathrm{Var}X = EX^2 - (EX)^2 = \frac{7}{2} - \frac{1}{4} = \frac{13}{4}.$$

(d)的另一种解法

$$\begin{aligned}
EX &= \int_{0}^{+\infty} P(X>x))dx - \int_{-\infty}^{0} P(X<x)dx \\
&= \int_{1}^{+\infty} \frac{1}{2}e^{-(x-1)}dx + \int_{0}^{1} \frac{1}{2}dx - \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{2}e^{x}dx \\
&= \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{2}e^{u}du + \frac{1}{2} - \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{2}e^{x}dx \\
&= \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

另外，

$$
\begin{aligned}
EX^2 &= \int_0^{+\infty} P(X^2 > x)dx \\
&= \int_0^{+\infty} P(X^2 > u^2)du^2 \\
&= 2\int_0^{+\infty} u\left[P(X > u) + P(X < -u)\right] du \\
&= 2\int_0^{+\infty} u\left[\frac{e^{-(u-1)}I_{u>1}}{2} + \frac{I_{0<u<1}}{2} + \frac{e^{-u}}{2}\right] du \\
&= \int_1^{+\infty} ue^{-(u-1)}du + \int_0^1 udu + \int_0^{+\infty} ue^{-u}du \\
&= \int_0^{+\infty} (v+1)e^{-v}dv + \int_0^1 udu + \int_0^{+\infty} ue^{-u}du \\
&= 2 + \frac{1}{2} + 1 = \frac{7}{2}
\end{aligned}
$$

从而

$$
\mathrm{Var}X = EX^2 - (EX)^2 = \frac{7}{2} - \frac{1}{4} = \frac{13}{4}.
$$

题2 设随机变量X服从$(-\pi/2, \pi/2)$上的均匀分布。

求：(a) 随机变量$Y = \cos X$的概率密度函数。(b) Y的数学期望和方差。

解：(a) 先求Y的概率分布函数，

$$
\begin{aligned}
F_Y(y) &= P(Y \le y) = P(\cos X \le y) \\
&= I_{y\ge 1} + I_{0\le y<1}\left[P\left(-\frac{\pi}{2} < X \le -\arccos y\right) + P\left(\arccos y \le X < \frac{\pi}{2}\right)\right] \\
&= I_{y\ge 1} + I_{0\le y<1}\frac{\left[-\arccos y + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} - \arccos y\right]}{\pi} \\
&= I_{y\ge 1} + I_{0\le y<1}\frac{\pi - 2\arccos y}{\pi}.
\end{aligned}
$$

由此解得Y的概率密度函数

$$
f_Y(y) = F_Y'(y) = \frac{2}{\pi\sqrt{1-y^2}}I_{0\le y<1}.
$$

(a)的另解。直接利用随机变量函数的概率密度公式

$$
\begin{aligned}
f_Y(y) &= \sum_{x:cosx=y} f_X(x)\frac{1}{|\frac{dy}{dx}|} \\
&= f_X(-\arccos y)\frac{1}{|(\cos x)'|_{x=-\arccos y}} + f_X(\arccos y)\frac{1}{|(\cos x)'|_{x=\arccos y}} \\
&= 2\frac{1}{\pi}I_{-\frac{\pi}{2}<\arccos y<\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\sqrt{1-\cos^2 x}\big|_{x=-\arccos y}} \\
&= \frac{2}{\pi\sqrt{1-y^2}}I_{0<y<1}.
\end{aligned}
$$

(b)

$$EY=\int_{-\infty}^{+\infty}yf_Y(y)=\int_0^1 y\frac{2}{\pi\sqrt{1-y^2}}dy=-\frac{2}{\pi}\int_0^1 d\sqrt{1-y^2}=\frac{2}{\pi}.$$

或者利用随机变量函数的数学期望公式

$$EY=\int_{-\infty}^{+\infty}\cos x\cdot f_X(x)dx=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\sin x}{\pi}=\frac{2}{\pi}.$$

$$EY^2=\int_{-\infty}^{+\infty}\cos^2 x\cdot f_X(x)dx=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos(2x)+1}{2\pi}dx=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{2\pi}dx=\frac{1}{2}.$$

从而

$$\mathrm{Var}Y=EY^2-(EY)^2=\frac{1}{2}-\frac{4}{\pi^2}=\frac{\pi^2-8}{2\pi^2}\approx 0.095.$$

<u>注</u>：初学者应该养成一个良好的习惯，就是在计算概率分布函数或概率密度函数时，注意通过示性函数或其他形式强调自变量的取值范围。比如这个问题中，Y的概率密度函数的表达式$\frac{2}{\pi\sqrt{1-y^2}}$的自然定义域为$-1<y<1$，而实际上作为概率密度函数，它的适用范围只是$0<y<1$。如果不注意这个区别，那么在利用$Y$的密度计算$EY$或$Y$的各种矩时，就会发生错误。

题3 设随机变量U服从$[0,1]$上的均匀分布，函数$F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 满足以下三个条件

1. 对任何$x\in\mathbb{R}$，$F(-\infty)=0\le F(x)\le 1=F(+\infty)$；
2. F单调不减；
3. F在所有$x\in\mathbb{R}$处都是右连续的。

证明：

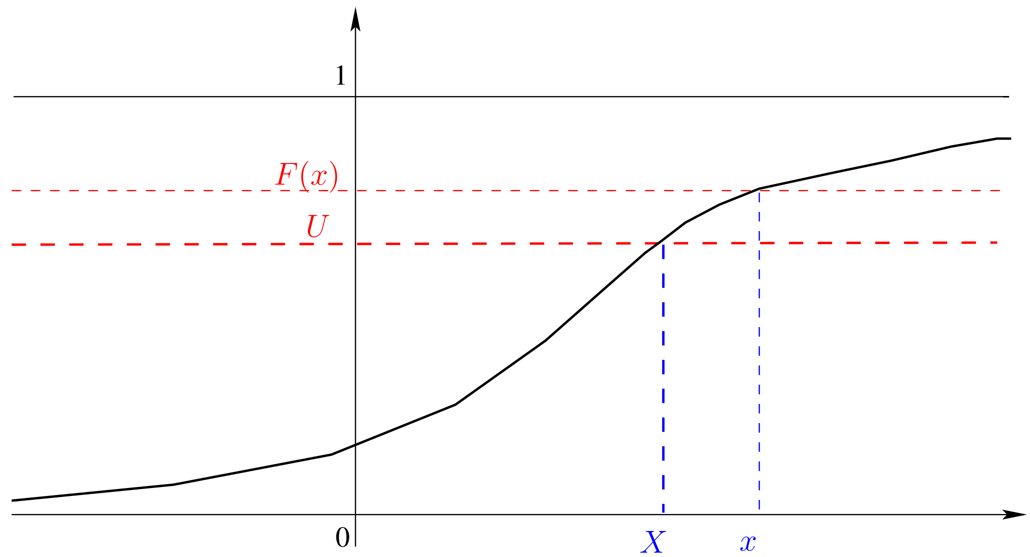
1. 如果F连续且严格单调增，则随机变量$X=F^{-1}(U)$的概率分布函数就是F；
2. 一般情况下，即F不严格单调增或在某些x处不连续时，随机变量

$$X=\inf\{x\in\mathbb{R}|F(x)\ge U\}$$

的概率分布函数就是F 。

证明：1、因F严格单调增且连续，故F^{-1}在$(0,1)$上处处有定义且严格单调增，于是对$X=F^{-1}(U)$，

$$F_X(x)=P(X\le x)=P(F^{-1}(U)\le x)=P(U\le F(x))=F(x),\quad \forall x\in\mathbb{R}.$$



2、让我们先回顾一下上面这个证明。实际上，我们从$X = F^{-1}(U)$得到

$$\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x\} = \{\omega \in \Omega : U(\omega) \leq F(x)\}, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

而这等价于

$$\{(x,\omega)|X(\omega) \leq x\} = \{(x,\omega)|U(\omega) \leq F(x)\},$$

这等价于

$$\{x \in \mathbb{R} : X(\omega) \leq x\} = \{x \in \mathbb{R} : U(\omega) \leq F(x)\}, \qquad \forall \omega \in \Omega.$$

而上式左端是区间$[X(\omega), +\infty)$，因此由上式可得

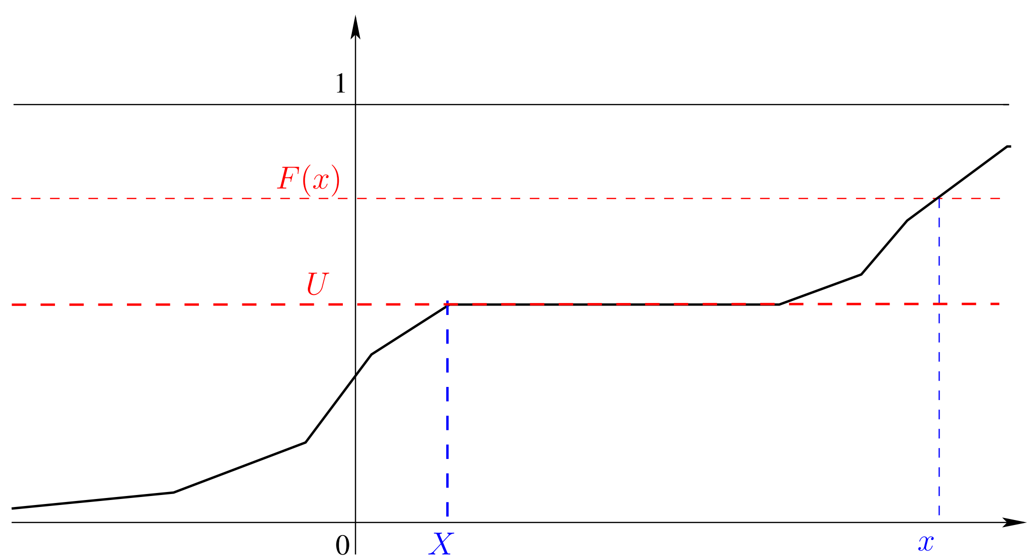
$$X(\omega) = \min\{x \in \mathbb{R} : X(\omega) \leq x\} = \min\{x \in \mathbb{R} : U(\omega) \leq F(x)\}.$$

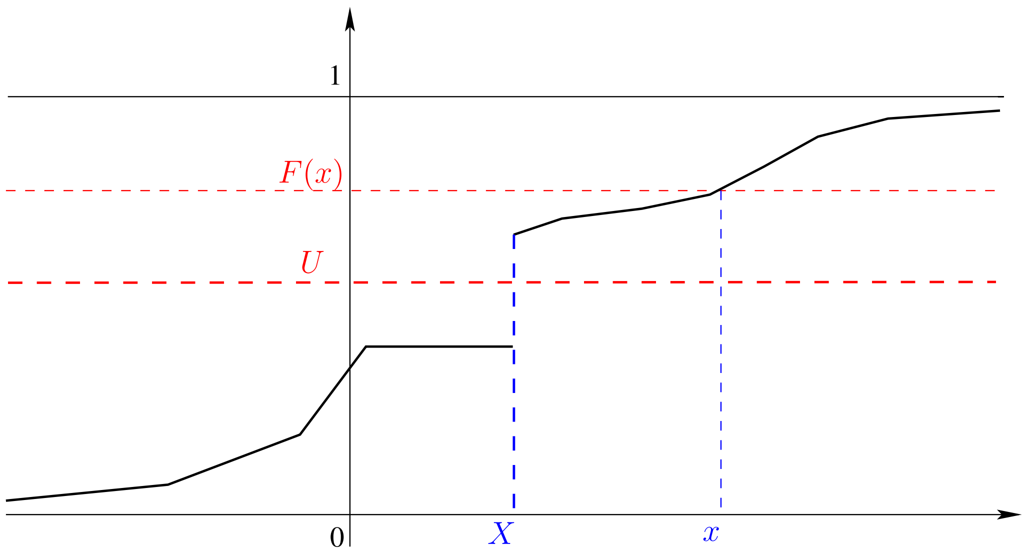
但我们事先并不知道$\{x \in \mathbb{R} : U(\omega) \leq F(x)\}$是否有最小值，所以我们定义

$$X(\omega) = \inf\{x \in \mathbb{R} : U(\omega) \leq F(x)\}.$$

这里inf表示“下确界”，即一个实数集合的所有下界中的最大下界。

现在我们已经知道了X的表达式的来历，让我们来证明对任意$\omega \in \Omega$，集合$\{x \in \mathbb{R} : U(\omega) \leq F(x)\}$ 就是区间$[X(\omega), +\infty)$，这样就有$F_X = F$。





记

$$A = \{\omega \in \Omega | 0 < U(\omega) < 1\}.$$

则$P(A^c) = P(U = 1) + P(U = 0) = 0$，所以$P(A) = 1$。

对$\omega \in A$（即$0 < U(\omega) < 1$），由于$F(+\infty) = 1$，所以$\{x \in \mathbb{R} : U(\omega) \leq F(x)\}$非空；又因$F(-\infty) = 0$，故$\{x \in \mathbb{R} : U(\omega) \leq F(x)\}$有下界。

因此我们可以定义

$$X(\omega) = \begin{cases} \inf\{x \in \mathbb{R} : U(\omega) \leq F(x)\}, & \omega \in A; \\ 0, & \omega \in A^c. \end{cases}$$

以下设$\omega \in A$。由X的定义，我们知道

$$\{x \in \mathbb{R} : U(\omega) \leq F(x)\} \subset [X(\omega), +\infty).$$

所以，我们只需证明

$$[X(\omega), +\infty) \subset \{x \in \mathbb{R} : U(\omega) \leq F(x)\}.$$

首先，如果$t > X(\omega)$，那么t不是$\{x \in \mathbb{R} : U(\omega) \leq F(x)\}$的下界（因为$X(\omega)$已经是最大的下界），所以存在$x \in \mathbb{R}$满足

$$X(\omega) \leq x < t, \quad U(\omega) \leq F(x).$$

于是，由F单调不减，我们知道

$$U(\omega) \leq F(x) \leq F(t).$$

因此$t \in \{x \in \mathbb{R} : U(\omega) \leq F(x)\}$，于是我们证明了

$$(X(\omega), +\infty) \subset \{x \in \mathbb{R} : U(\omega) \leq F(x)\}.$$

因为F右连续，所以

$$U(\omega) \leq \lim_{x \searrow X(\omega)} F(x) = F(X(\omega)),$$

因此$X(\omega) \in \{x \in \mathbb{R} : U(\omega) \leq F(x)\}$。所以

$$[X(\omega), +\infty) = \{x \in \mathbb{R} : U(\omega) \leq F(x)\}.$$

因此，对任何$x\in\mathbb{R}$，

$$\begin{aligned}F_X(x)=P(X\le x)&=P(A\cap\{X\le x\})+P(A^c\cap\{X\le x\})\\&=P(A\cap\{X\le x\})\\&=P(A\cap\{U\le F(x)\})\\&=P(A\cap\{U\le F(x)\})+P(A^c\cap\{U\le F(x)\})\\&=P(U\le F(x))=F(x).\end{aligned}$$

证毕。

注：这个题目的背景是随机模拟中构造特定分布的随机数的逆图像方法。常见的计算机软件中通常都会给出在一定范围里近似均匀分布的“伪随机数”，通过适当的规范化，我们认为计算机给出的伪随机数是服从$(0,1)$上的均匀分布的，如何利用这样的伪随机数给出服从指定概率分布的随机数，就是随机模拟中的一个基本问题。根据上述问题的答案，我们可以利用均匀分布的随机数U的值，去找这个特定概率分布的下侧U-分位数X，这个X即服从指定的分布。

举例而言，我们知道指数分布$\mathrm{Exp}(\lambda)$的分布函数为

$$F(x)=(1-e^{-\lambda x})I_{x\ge 0},$$

于是对$0<p<1$，由

$$F(x)=p$$

解得下侧p-分位数为

$$x=\frac{-\ln(1-p)}{\lambda},$$

于是

$$X=\frac{-\ln(1-U)}{\lambda}$$

就是服从这个指数分布的随机变量。

再举一例。我们知道几何分布$\mathrm{Geo}(p)$的分布函数为

$$F(x)=I_{x\ge 1}\sum_{k=1}^{[x]}p(1-p)^{k-1}=I_{x\ge 1}\left(1-(1-p)^{[x]}\right),$$

这个分布函数不是严格增的，对$0<u<1$，这个几何分布的下侧u-分位数是满足不等式

$$I_{x\ge 1}\left(1-(1-p)^{[x]}\right)\ge u,$$

的最小的x值，因此$x\ge 1$且

$$[x]\ln(1-p)\le\ln(1-u),$$

即

$$[x]\ge\frac{\ln(1-u)}{\ln(1-p)}.$$

对$u\notin\{1-(1-p)^k:k=0,1,2,\dots,\}$，$\frac{\ln(1-u)}{\ln(1-p)}$不是整数，所以

$$[x]>\frac{\ln(1-u)}{\ln(1-p)}.$$

因此最小的x值为

$$\left[\frac{\ln(1-u)}{\ln(1-p)}\right]+1.$$

因此

$$X=\left[\frac{\ln(1-U)}{\ln(1-p)}\right]+1$$

给出一个服从这个几何分布的随机变量。

题4 设随机变量(X,Y)有联合概率密度函数$f(x,y)=cxy$（$0\le x\le y\le 2$）。计算常数c，并判断X与Y是否独立。

题5 设随机变量X与Y有联合概率密度函数$f(x,y)=(1+xy)/4$（$|x|<1,|y|<1$）。证明：X与Y不独立，但是X^2与Y^2相互独立。

题6 袋中装有N个球，其中白球数为随机变量，设为X，已知$EX=n$（n可以不是整数）。证明从该袋中摸出一球为白球的概率是n/N。并用这个结论解决习题1.4.26。

证明：记B（取“白”字的汉语拼音的首个字母）为事件“从袋中随机取出一个球是白球”。在已知袋中有k个白球的情况下，

$$P(B|X=k)=\frac{k}{N}.$$

从由全概率公式，

$$P(B)=\sum_{k\ge 0}P(X=k)P(B|X=k)=\sum_{k\ge 0}P(X=k)\frac{k}{N}=\frac{EX}{N}.$$

证毕。

下面我们求解习题1.4.26，即从装有b个黑球，r个红球的袋中每次取出一个球，然后将其放回同时再加入c的同颜色的球，然后再取，记B_k表示第k次取得的是黑球。我们希望证明

$$P(B_k)=\frac{b}{b+r},\qquad \forall k\ge 1.$$

<u>第一个证明</u>：设X_k为第k次取球前袋中的黑球数。则它的所有可能的取值为

$$b,b+c,\dots,b+(k-1)c,$$

事件$X_k=b+mc$（$0\le m\le k-1$）即在前$k-1$次取球中共取得过m次黑球，$k-1-m$次红球。于是对取得的全是红球和取得的全是黑球这两个事件，

$$P(X_k=b)=\frac{r(r+c)\cdots[r+(k-2)c]}{(b+r)(b+r+c)\cdots[b+r+(k-2)c]},$$
$$P(X_k=b+(k-1)c)=\frac{b(b+c)\cdots[b+(k-2)c]}{(b+r)(b+r+c)\cdots[b+r+(k-2)c]};$$

对$1\le m<k-1$，考虑到取出黑球和红球的各种顺序，我们有

$$P(X_k=b+mc)=\binom{k-1}{m}\frac{b(b+c)\cdots[b+(m-1)c]\times r(r+c)\cdots[r+(k-m-2)c]}{(b+r)(b+r+c)\cdots[b+r+(k-2)c]}.$$

于是由X_k的分布列，我们得到关于k,b,r,c的一个恒等式

$$\frac{\sum_{m=0}^{k-1}\binom{k-1}{m}\left[\prod_{j=0}^{m-1}(b+jc)\times\prod_{l=0}^{k-m-2}(r+lc)\right]}{\prod_{s=0}^{k-2}(b+r+sc)}=1, \tag{*}$$

其中，我们规定当$u>v$时，$\prod_{j=u}^{v}a_j=1$。

下面我们按定义计算X_k的数学期望，其中用到上述形式的恒等式(*)。

$$\begin{aligned}
EX_k &= \sum_{m=0}^{k-1}(b+mc)P(X_k=b+mc)\\
&= \sum_{m=0}^{k-1}(b+mc)\binom{k-1}{m}\frac{\prod_{j=0}^{m-1}(b+jc)\times\prod_{l=0}^{k-m-2}(r+lc)}{\prod_{s=0}^{k-2}(b+r+sc)}\\
&= \sum_{m=0}^{k-1}\binom{k-1}{m}\frac{b\prod_{j=0}^{m-1}(b+c+jc)\times\prod_{l=0}^{k-m-2}(r+lc)}{(b+r)\prod_{s=0}^{k-3}(b+c+r+sc)}\\
&= \frac{b}{b+r}\sum_{m=0}^{k-1}\binom{k-1}{m}\frac{\prod_{j=0}^{m-1}(b+c+jc)\times\prod_{l=0}^{k-m-2}(r+lc)}{\prod_{s=0}^{k-3}(b+c+r+sc)}\\
&= \frac{b}{b+r}\times\frac{\prod_{s=0}^{k-2}(b+c+r+sc)}{\prod_{s=0}^{k-3}(b+c+r+sc)}\\
&= \frac{b}{b+r}\times[b+r+(k-1)c],
\end{aligned}$$

其中倒数第2个等号利用了关于$k,b+c,r,c$的恒等式。于是由第6题结论

$$P(B_k)=\frac{EX_k}{b+r+(k-1)c}=\frac{b}{b+r}.$$

注：这种利用概率分布列给出的恒等式计算数学期望的方法对有些问题是很有效的。

<u>第二个证明</u>：当$k=1$时，上述结论是显然的。假设$k-1$时结论成立，我们来证明k时结论也成立。

记X_k为第k次取球前袋中的黑球数，

$$\xi_k=I_{B_k}=\begin{cases}1, & \text{若第}k\text{次取到的是黑球;}\\ 0, & \text{否则.}\end{cases}.$$

于是

$$X_k = X_{k-1} + c\xi_{k-1}.$$

另外，利用我们刚证明的结论，

$$P(B_k) = \frac{EX_k}{b+r+(k-1)c}, \quad P(B_{k-1}) = \frac{EX_{k-1}}{b+r+(k-2)c}.$$

而

$$EX_k = EX_{k-1} + cE\xi_{k-1} = \big[b+r+(k-2)c\big]P(B_{k-1}) + cP(B_{k-1}) = \big[b+r+(k-1)c\big]P(B_{k-1}),$$

所以

$$P(B_k) = \frac{\big[b+r+(k-1)c\big]P(B_{k-1})}{b+r+(k-1)c} = P(B_{k-1}) = \frac{b}{b+r}.$$

题7 若一个离散型随机变量X在某个点上的概率达到最大，则称该点为“众数”(mode)。分别求二项分布、泊松分布和负二项分布的众数。

解：设X服从二项分布$B(n,p)$，则

$$P(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, \quad k = 0, 1, \ldots, n.$$

我们比较相邻两项的概率值的大小，因为它们都是乘积的形式，所以我们比较它们的比值与1孰大孰小，

$$\frac{P(X=k)}{P(X=k-1)} - 1 = \frac{(n-k+1)p}{k(1-p)} - 1 = \frac{(n+1)p-k}{k(1-p)}.$$

因此当且仅当

$$k < (n+1)p$$

时，$P(X=k) > P(X=k-1)$。同理可证，当且仅当

$$k > (n+1)p - 1$$

时，$P(X=k) > P(X=k+1)$。

如果$(n+1)p$不是整数，那么它的整数部分$[(n+1)p]$（即不大于$(n+1)p$的最大整数）是区间$\big[(n+1)p-1, (n+1)p\big]$中的唯一整数，它就是二项分布$B(n,p)$的众数。

如果$(n+1)p$是整数，则分布列在截至$(n+1)p-1$时都是严格增，从$(n+1)p$以后变成严格减，而

$$P(X=(n+1)p) = P(X=(n+1)p-1),$$

所以，这时二项分布$B(n,p)$有两个众数：$(n+1)p-1$和$(n+1)p$。

注意，二项分布的众数与它的数学期望np在数值上不同，但只是稍有区别。

类似讨论Poisson分布和负二项分布。这些分布都是所谓“单峰”分布，即分布列$P(X=k)$随着k增大先增大后减少。

注：对离散分布而言，众数体现了一个随机变量在所有可能的取值中最可能取到的那个值。一个分布可以只有一个众数，也可以有多个众数（比如离散的均匀分布，每个以正概率取到的值都是众数）。对连续型分布而言，也可以类似地用概率密度函数的最大值点来定义众数，比如一维正态分布的众数就是它的密度函数的对称轴的位置，也就是它的数学期望。但众数可以不等于数学期望，比如对指数分布$\mathrm{Exp}(\lambda)$而言，它的众数是$x=0$，而指数分布的期望为$1/\lambda$。而第1题中那个分布就有两个众数$x=0$和$x=1$。

题8 求实数c使$E|X-c|$达到最小。

解：我们先考虑一种很特殊的情形，X有概率密度函数$f(x)$，并且$f(x)$处处连续。

$$h(c) := E|X-c| = \int_{-\infty}^{+\infty} |x-c| f(x)dx = \int_c^{+\infty} (x-c)f(x)dx + \int_{-\infty}^{c} (c-x)f(x)dx.$$

于是h关于c可微，

$$\begin{aligned} h'(c) &= \frac{d}{dc}\left(\int_c^{+\infty} (x-c)f(x)dx\right) + \frac{d}{dc}\left(\int_{-\infty}^{c} (c-x)f(x)dx\right) \\ &= -(c-c)f(c) - \int_c^{+\infty} f(x)dx + (c-c)f(c) + \int_{-\infty}^{c} f(x)dx \\ &= F(c) - \big[1-F(c)\big] = 2F(c) - 1. \end{aligned}$$

所以，在区间$I_1 := \{c : F(c) < 1/2\}$上，$h'(c) < 0$，$h$严格减，在区间$I_3 := \{c : F(c) > 1/2\}$上，$h'(c) > 0$，$h$严格增，在区间

$$I_2 := \{c : F(c) = 1/2\}$$

上，h为常数，所以区间I_2中的点都是h的最小值点。当区间I_2是单点集时，这个唯一的c值恰是X的中位数。

下面我们考虑一般情形。这时，

$$\begin{aligned} h(c) := E|X-c| &= \int_0^{+\infty} P(|X-c| > x)dx \\ &= \int_0^{+\infty} P(X > c+x)dx + \int_0^{+\infty} P(X < c-x)dx \\ &= \int_c^{+\infty} P(X > x)dx + \int_{-\infty}^{c} P(X < x)dx. \end{aligned}$$

所以，对$c_1 < c_2$，

$$h(c_2) - h(c_1) = \int_{c_1}^{c_2} P(X < x)dx - \int_{c_1}^{c_2} P(X > x)dx,$$

于是

$$\big[P(X < c_1) - P(X > c_1)\big](c_2 - c_1) \le h(c_2) - h(c_1) \le \big[P(X < c_2) - P(X > c_2)\big](c_2 - c_1).$$

如果$F(c_2) < \frac{1}{2}$，则

$$P(X < c_2) - P(X > c_2) \le 2F(c_2) - 1 < 0.$$

如果$P(X < c_1) > \frac{1}{2}$，则

$$P(X < c_1) - P(X > c_1) = P(X < c_1) - 1 + P(X \le c_1) \ge 2P(X < c_1) - 1 > 0.$$

于是h在区间

$$I_1 := \left\{c \in \mathbb{R} : F(c) < \frac{1}{2}\right\}$$

上严格减（由分布函数的性质，我们知道I_1是形如$(c^*, +\infty)$的开区间），在区间

$$I_3 := \left\{c \in \mathbb{R} : P(X < c) > \frac{1}{2}\right\}$$

上严格增（由函数$c \mapsto P(X<c)$的性质，我们知道I_3是形如$(-\infty, c_*)$的开区间）。如果$c_1 < c_2$是区间

$$I_2 := \left\{ c \in \mathbb{R} : P(X<c) \le \frac{1}{2} \le F(c) \right\} = [c_*, c^*]$$

中的两个点，则

$$\frac{1}{2} \le F(c_1) = P(X \le c_1) \le P(X < c_2) \le \frac{1}{2},$$

所以

$$F(c) = P(X<c) = \frac{1}{2}, \quad \forall c \in I_2,$$

于是对任意$c_1, c_2 \in I_2, c_1 < c_2$，

$$0 = \big[P(X<c_1) - P(X>c_1)\big](c_2 - c_1) \le h(c_2) - h(c_1) \le \big[P(X<c_2) - P(X>c_2)\big](c_2 - c_1) = 0, \quad \forall.$$

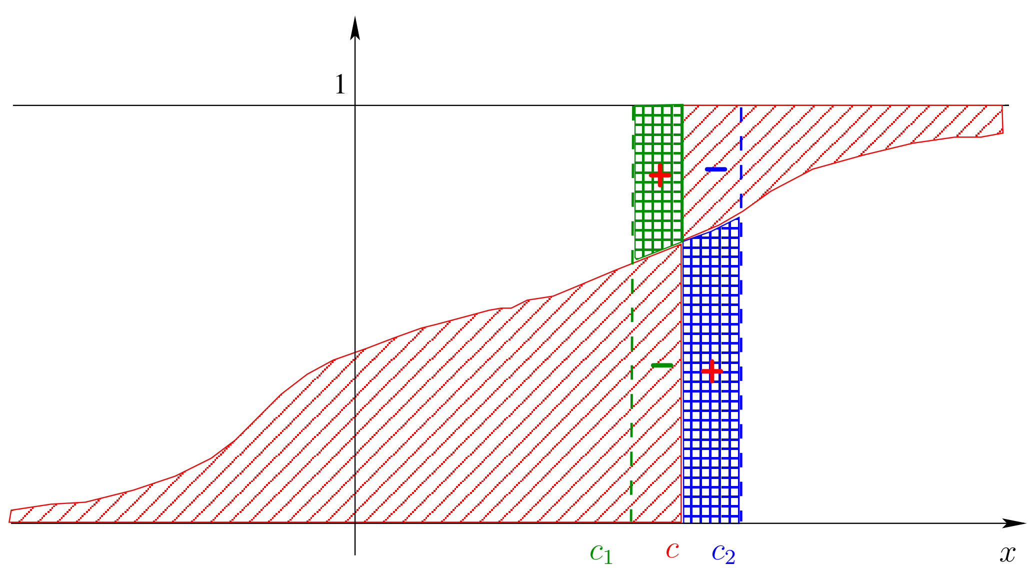
即h在区间I_2上为常值。这个常值就是h的最小值。

当I_2是单点集时，这个唯一的c值恰是X的中位数。

注：在分布函数的图像中把

$$h(c) = \int_c^{+\infty} P(X>x)dx + \int_{-\infty}^{c} P(X<x)dx.$$

解释成某些特定区域（直线$x=c$左侧、分布函数图像以下、$y=0$以上的区域及直线$x=c$右侧、分布函数图像以上、$y=1$以下的区域，即下图中红色阴影区域）的面积，你可以更直观地理解上述一般情形的证明（比如让直线$x=c$从左向右移动，在下图所示的情形中，直线$x=c$向左移动会使面积减小，而向右移动会使面积增大）。



题9 设随机变量X服从参数为λ的泊松分布，试导出X的k阶原点矩的递推公式，并由此求出X的二阶、三阶、四阶原点矩及中心矩。

解：考虑X的概率母函数

$$g(z) = E(z^X) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda} z^n = e^{\lambda(z-1)}.$$

求关于z的k阶导数在$z=1$的值，得到

$$\begin{aligned} g^{(k)}(1) &= E\big[X(X-1)\cdots(X-k+1)1^{X-k}\big] = E\big[X(X-1)\cdots(X-k+1)\big] \\ &= k! \times e^{\lambda(z-1)}\text{在}z=1\text{处的Taylor展开式中}(z-1)^k\text{的系数} = \lambda^k. \end{aligned}$$

所以

$$EX^k + a_{k,k-1}EX^{k-1} + a_{k,k-2}EX^{k-2} + \cdots + a_{k,1}EX = \lambda^k,$$

其中$a_{k,k-1},\ldots,a_{k,1}$满足

$$x(x-1)\cdots(x-k+1) = x^k + a_{k,k-1}x^{k-1} + \cdots + a_{k,1}x.$$

易见

$$\begin{aligned} a_{k+1,k} &= a_{k,k-1} - k, \\ a_{k+1,j} &= a_{k,j-1} - ka_{k,j}, \quad j = 2,3,\ldots,k-1; \\ a_{k+1,1} &= -ka_{k,1}. \\ a_{2,1} &= -1. \end{aligned}$$

由

$$E(X(X-1)) = \lambda^2$$

得到

$$EX^2 = \lambda^2 + EX = \lambda^2 + \lambda.$$

由

$$E(X(X-1)(X-2)) = \lambda^3$$

得到

$$EX^3 = \lambda^3 + 3EX^2 - 2EX = \lambda^3 + 3(\lambda^2+\lambda) - 2\lambda = \lambda^3 + 3\lambda^2 + \lambda.$$

由

$$E(X(X-1)(X-2)(X-3)) = \lambda^4$$

得到

$$EX^4 = \lambda^4 + 6EX^2 - 11EX^2 + 6EX = \lambda^4 + 6(\lambda^3+3\lambda^2+\lambda) - 11(\lambda^2+\lambda) + 6\lambda = \lambda^4 + 6\lambda^3 + +7\lambda^2 + \lambda.$$

利用

$$E(X-EX)^k = E(X-\lambda)^k = \sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}(-\lambda)^{k-i}EX^i$$

可从X的各阶原点矩得到X的各阶中心矩。