概率论与数理统计第五次习题课题目解答

题1 将编号为 1 至 n 的 n 个球随机投入编号为 1 至 n 的 n 个盒子中，并限制每一个盒子中只能放入一个球，设球与盒子的号码一致的个数为 S_n ，求证：

$$\frac{S_n - ES_n}{n} \xrightarrow{P} 0, \quad n \to \infty$$

<u>证法</u>1. 记

$$X_k = \begin{cases} 1, & \text{如果编号为}k\text{的球被放入编号为}k\text{的盒子} \\ 0, & \text{否则} \end{cases}$$

则

$$S_n = X_1 + \cdots + X_n,$$

于是对任意$\varepsilon > 0$

$$P\left(\left|\frac{S_n - ES_n}{n}\right| > \varepsilon\right) \le \frac{\mathrm{Var}S_n}{n^2\varepsilon^2} = \frac{1}{n^2\varepsilon^2}\left(\sum_{i=1}^n \mathrm{Var}(X_i) + \sum_{1\le i\ne j\le n} \mathrm{Cov}(X_i, X_j)\right).$$

而

$$P(X_k = 1) = \frac{1}{n}, \quad P(X_i = 1, X_j = 1) = \frac{1}{n(n-1)}, \quad \forall 1 \le k \le n, \quad \forall 1 \le i \ne j \le n,$$

故

$$EX_k = \frac{1}{n}, \quad \mathrm{Var}X_k = \frac{n-1}{n^2}, \quad \mathrm{Cov}(X_k, X_l) = \frac{1}{n(n-1)} - \frac{1}{n^2} = \frac{1}{n^2(n-1)}.$$

所以，

$$\frac{1}{n^2\varepsilon^2}\left(\sum_{i=1}^n \mathrm{Var}(X_i) + \sum_{1\le i\ne j\le n} \mathrm{Cov}(X_i, X_j)\right) = \frac{1}{n^2\varepsilon^2}\left(\frac{n-1}{n} + \frac{1}{n}\right) \to 0, \quad n \to \infty.$$

因此$\frac{S_n - ES_n}{n} \xrightarrow{P} 0, \quad n \to \infty$。 □

<u>证法</u>2. 符号同上，因为

$$\mathrm{Cov}(X_k, X_l) \le \sqrt{\mathrm{Var}X_k} \cdot \sqrt{\mathrm{Var}X_l} = \frac{n-1}{n^2}$$

由证法1

$$\begin{aligned} P\left(\left|\frac{S_n - ES_n}{n}\right| > \varepsilon\right) &\le \frac{1}{n^2\varepsilon^2}\left(\sum_{i=1}^n \mathrm{Var}(X_i) + \sum_{1\le i\ne j\le n} \mathrm{Cov}(X_i, X_j)\right) \\ &\le \frac{1}{n^2\varepsilon^2}\left(n \cdot \frac{n-1}{n^2} + n(n-1)\cdot\frac{n-1}{n^2}\right) \\ &= \frac{n-1}{n^2\varepsilon^2} \to 0, \quad n \to \infty. \end{aligned}$$

结论成立。 □

证法3. 仍然是对S_n用Chebyshev不等式。由于$0 \le S_n \le n$恒成立，所以

$$\mathrm{Var}(S_n) \le ES_n^2 \le nE(S_n) = n,$$

因此

$$\frac{\mathrm{Var}(S_n)}{n^2} \le \frac{1}{n} \to 0, \quad n \to +\infty.$$

□

证法4. 由于$ES_n = 1$，所以

$$\frac{ES_n}{n} = \frac{1}{n} \to 0, \quad n \to \infty.$$

由于$S_n \ge 0$，所以对任何$\varepsilon > 0$，由Markov不等式

$$P\left(\left|\frac{S_n}{n}\right| > \varepsilon\right) = P\left(\frac{S_n}{n} > \varepsilon\right) \le \frac{1}{\varepsilon} E\left(\frac{S_n}{n}\right) = \frac{1}{n\varepsilon} \to 0, \quad n \to \infty.$$

所以

$$\frac{S_n - ES_n}{n} \xrightarrow{P} 0, \quad n \to +\infty.$$

□

题2 一报贩发现每个路过他的报摊的行人向他买报的概率为 $\frac{1}{3}$ 。求在他出售了 100 份报纸时的过路人的数目在 280 人到 320 人之间的概率。（用两种不同的估计方法，并比较它们的优劣）

解法1. 记

$$Y_n = \begin{cases} 1, & \text{若第}n\text{个人买报纸,} \\ 0, & \text{否则} \end{cases}$$

于是$Y_1, Y_2, \ldots, Y_n, \ldots$独立同分布，服从Bernoulli分布$B(1, 1/3)$。
如果第n个行人买了第100份报纸，则

$$Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_n = 100.$$

显然$n \ge 100$（因为每个行人只买一份报纸）。根据中心极限定理，

$$\frac{Y_1 + \cdots + Y_n - \frac{n}{3}}{\sqrt{n \cdot \frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{3}\right)}} = \frac{3(Y_1 + \cdots + Y_n) - n}{\sqrt{2n}}$$

近似服从标准正态分布$N(0,1)$。
我们关心$280 \le n \le 320$的概率。易见$\frac{300-n}{\sqrt{2n}}$关于n是严格减函数，所以

$$\begin{aligned} P\left(\frac{300-320}{\sqrt{640}} \le \frac{3(Y_1 + \cdots + Y_n) - n}{\sqrt{2n}} = \frac{300-n}{\sqrt{2n}} \le \frac{300-280}{\sqrt{560}}\right) &\approx \Phi\left(\frac{5}{\sqrt{35}}\right) - \Phi\left(-\frac{5}{\sqrt{40}}\right) \\ &\approx \Phi(0.845) + \Phi(0.791) - 1 \\ &= 0.8009 + 0.7852 - 1 \\ &= 0.5930 \end{aligned}$$

曾有不少学生是这样解答的，但是它是有缺陷的！

问题在哪里呢?

首先,

$$Y_1+\cdots+Y_n=100$$

并不能说明第n个人买了第100份报纸，因为n可以是从卖出第100份报纸开始到卖出第101份报纸之前任何一个行人的序号。实际上，买到第100份报纸的行人的序号应该是

$$N=\min\{n:Y_1+\cdots+Y_n=100\},$$

它是个随机变量。

其次，中心极限定理说对任何充分大但是确定的整数n，$\frac{Y_1+\cdots+Y_n-nEY}{\sqrt{n\mathrm{Var}Y}}$近似服从标准正态分布。但当$N$是随机变量时，即使我们知道$N\geq 100$，但是我们并不能直接有中心极限定理知道$\frac{Y_1+\cdots+Y_N-N\cdot EY}{\sqrt{N\mathrm{Var}Y}}$是否近似服从正态分布$N(0,1)$。

好，我们来看看正确的解答。由N的定义，我们知道，事件$\{N>m\}$就是"前m个人都没有买到第100份报纸"，也就是

$$Y_1+\cdots+Y_m<100.$$

由中心极限定理,

$$U_n=\frac{Y_1+\cdots+Y_n-\frac{n}{3}}{\sqrt{\frac{2n}{9}}}=\frac{3(Y_1+\ldots+Y_n)-n}{\sqrt{2n}}\dot{\sim}N(0,1),$$

注意到

$$\{280\leq N\leq 320\}=\{N>279\}-\{N>320\},$$

所以

$$\begin{aligned}
&P(280\leq N\leq 320)\\
=&P\left(Y_1+Y_2+\cdots+Y_{279}<100\right)-P\left(Y_1+\cdots+Y_{320}<100\right)\\
=&P\left(U_{279}<\frac{99.5-93}{\sqrt{62}}\right)-P\left(U_{320}<-\frac{3\times 99.5-320}{8\sqrt{10}}\right)\quad \text{这里为什么做0.5修正?}\\
\approx&\Phi\left(0.826\right)-\Phi\left(-0.850\right)\\
\approx&0.5981.
\end{aligned}$$

□

思考题：设$0<p<1$，r是正整数，N_r服从负二项分布$\mathrm{NB}(r,p)$。问：当$r\to+\infty$时，随机变量

$$\frac{r-N_rp}{\sqrt{N_rp(1-p)}}$$

是否依分布收敛到正态分布$N(0,1)$?

解法2. "买，还是**不买**，这的确是个问题。"每个路过报摊的行人都在**相互独立地重复着**这样的抉择，至少在报贩看来大致是这样的。因此和每个早上一样，他面临着这样的Bernoulli试验。

他今天突然有了雅兴，想了解第k张报纸到底是卖给了第几个路经报摊的行人，而Pascal先生骄傲地告诉他，那个行人的序号X_k服从的正是用自己的名字命名的概率分布，而那些Newton迷们却宁愿叫它负二项分布。报贩知道，在这样的Bernoulli试验中相继卖出任何两份报纸之间，路过的行人数$Z_1,Z_2,\ldots,Z_k,\ldots$相互独立，都服从参数为1/3的几何分布，并

且$X_k = \sum_{j=1}^{k} Z_j$。于是X_{100}服从参数为100、1/3的Pascal分布（也就是Newton迷们称呼的负二项分布）。

忙于照看生意的报贩显然没有时间去计算$P(280 \le Z_1 + \cdots + Z_{100} \le 320)$所涉及的Pascal分布中41项概率值的和（更何况他压根$_{儿}$就忘记了Pascal写给他的那张纸条被放在哪了）。于是他想到了上回买报的Chebyshev先生对他讲的那个不等式，据说不知道分布也可以估计概率的大小。由于

$$E(Z_1 + \cdots + Z_{100}) = 100 \times 3 = 300, \quad \mathrm{Var}(Z_1 + \cdots + Z_{100}) = 100 \times 3^2 \times \frac{2}{3} = 600,$$

所以用Chebyshev不等式估计上述概率，那么

$$\begin{aligned}
&P\left(280 \le Z_1 + Z_2 + \cdots + Z_{100} \le 320\right) \\
=&1 - P\left(|Z_1 + \cdots + Z_{100} - E(Z_1 + \cdots + Z_{100})| \ge 20\right) \\
\ge&1 - \frac{\mathrm{Var}(Z_1 + \cdots + Z_{100})}{20^2} = 1 - \frac{6}{4} = -\frac{1}{2},
\end{aligned}$$

这的确太让人失望了：即使不做任何计算也不至于得出这么糟糕的估计吧。报贩有些心灰意冷。突然，他想起了上周报纸上的头条新闻“Laplace爵士发现了中心极限定理”，而自己遇到的问题刚好符合了爵士那个定理的要求，于是

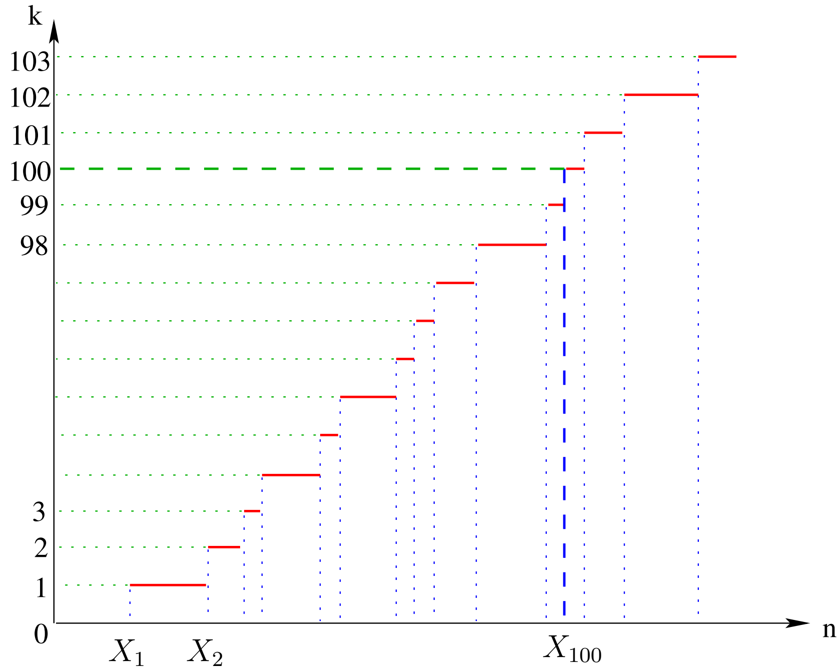
$$\begin{aligned}
&P\left(280 \le Z_1 + Z_2 + \cdots + Z_{100} \le 320\right) \\
=&P\left(\frac{280-300}{\sqrt{600}} \le \frac{Z_1 + \cdots + Z_{100} - E(Z_1 + \cdots + Z_{100})}{\sqrt{\mathrm{Var}(X_1 + \cdots + X_{100})}} \le \frac{320-300}{\sqrt{600}}\right) \\
=&2\Phi\left(\frac{20.5}{\sqrt{600}}\right) - 1 = 2\Phi(0.837) - 1 = 0.5973.
\end{aligned}$$

（实际上，当他料理完一天的生意，却在零钱袋里看到了Pascal留给他的那张字条，他静下心来拿着自己捡来的那个计算器用Pascal分布进行了计算，费了半天的劲才发现上述概率值为0.59786，对爵士的钦佩在内心里油然而生。） □

解法1和解法2的关系： 下图是函数

$$n \mapsto \sum_{j=1}^{n} Y_j$$

的图像，其中横坐标是路过人数，纵坐标是卖出报纸份数。



这是个随机的、单调不减的阶梯函数，它的函数值在X_k处从$k-1$跳跃到k。于是

$$X_k = \min\left\{n \middle| \sum_{j=1}^{n} Y_j = k\right\}$$

因此$X_{100} \geq 280$（也就是$X_{100} > 279$）等价于$\sum_{j=1}^{279} Y_j < 100$。对$X_{100} \leq 320$，我们考虑其对立事件$X_{100} > 320$，它等价于$\sum_{j=1}^{320} Y_j < 100$。

由于Y_j的非负性，$\sum_{j=1}^{320} Y_j < 100$是$\sum_{j=1}^{279} Y_j < 100$的一个子事件。

题3 设总体分布为$U[\theta-1, \theta+1]$，其中θ是未知参数，$X_1, \ldots, X_n$是来自该总体的简单随机样本。

1. 求θ的矩估计量$\hat{\theta}$，判断它的相合性和无偏性，计算均方误差$\mathrm{MSE}(\hat{\theta})$；
2. 证明对任何$0 \leq t \leq 1$，$\hat{\theta}_t := tX_{(n)} + (1-t)X_{(1)} + 1 - 2t$都是$\theta$的极大似然估计量；
3. 求$X_{(1)}$和$X_{(n)}$的概率分布以及数学期望$EX_{(1)}$、$EX_{(n)}$；
4. 问$\hat{\theta}_t$是否为θ的相合估计和无偏估计？
5. 求$X_{(1)}, X_{(n)}$的联合分布，以及$X_{(1)} + X_{(n)}$的概率分布，并计算方差$\mathrm{Var}(\hat{\theta}_{1/2})$；对比第1问的结果，你有何结论？

解. (a) 由$EX = \theta$得到矩估计$\hat{\theta} = \bar{X}$。根据大数定律，它是θ的（强）相合估计。$E\bar{X} = EX = \theta$，故矩估计是无偏估计，这时

$$\mathrm{MSE}(\hat{\theta}) = \mathrm{Var}\bar{X} = \frac{\mathrm{Var}X}{n} = \frac{2^2}{12n} = \frac{1}{3n}.$$

(b) 似然函数

$$L(\theta; x_1, \ldots, x_n) = p(x_1, \ldots, x_n; \theta) = \left(\frac{1}{2}\right)^n I_{x_{(n)}-1 \leq \theta \leq x_{(1)}+1},$$