Bonus 1　　吴诗非　2020010389

记 $P(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(i\xi+x)^2} dx$ ，$P(\xi)$ 显然是收敛的

$P'(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} -2i(i\xi+x) e^{-(i\xi+x)^2} dx$　　记 $z = i\xi + x$，$dz = dx$

~~故~~ $\cancel{P'(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} -2iz e^{-z^2} dz}$　　$A = \lim\limits_{x\to-\infty} z$，$B = \lim\limits_{x\to+\infty} z$

故 $P'(z) = \int_A^B -2iz e^{-z^2} dz = i e^{-z^2}\Big|_A^B = i(e^{-B^2} - e^{-A^2})$

下证 $e^{-B^2} = 0$，设 $B^2 = (\lim\limits_{x\to+\infty} i\xi+x)^2$ 的实部为 a，虚部为 b

则 $0 \le \|e^{-(a+bi)}\| \le \|e^{-a}\| \cdot \|e^{-bi}\|$

$x \to +\infty$ 时 $a \to +\infty$，$\|e^{-a}\| \to 0$；且 $\|e^{-bi}\| = \|\cos b - i\sin b\| \le 1$ 有界

故 $x \to +\infty$ 时，$\|e^{-(a+b)i}\| \to 0$，$e^{-(a+b)i} \to 0$ 即 $e^{-B^2} \to 0$

$\therefore$ $x \to +\infty$ 时 $P'(z) = 0$

则 $P(z) = Const = P(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$

故对 $\forall \xi \in \mathbb{R}$，$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(i\xi+x)^2} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$

Bonus 2

设 Z_i、W_j 满足 Bernoulli分布，$P(Z_i=1)=P(W_j=1)=p$，$1\le i\le n$，$1\le j\le m$

则 $X=Z_1+Z_2+\cdots+Z_n$，$Y=W_1+W_2+\cdots+W_m$

Z_i 母函数 $g_0(z)=P(Z_i=0)+P(Z_i=1)z=1-p+pz$

Z_i 相互独立，则 X 的母函数 $g_1(z)=(g_0(z))^n=(1-p+pz)^n$

同理，Y 的生成函数 $g_2(z)=(1-p+pz)^m$

由于 X、Y 相互独立，故 $X+Y$ 的生成函数 $g(z)=g_1(z)g_2(z)$

$g(z)=(1-p+pz)^{m+n}$

根据 $g(z)$ 可知，$P(X+Y=k)=\binom{m+n}{k}p^k(1-p)^{m+n-k}$，$\forall k: 0\le k\le m+n$

由二项分布的定义可知，$X+Y\sim B(m+n,p)$

Bonus 3

考虑P196页的15题：有 N 个标号 $1\sim N$ 的小球放在袋子里，每次取一个并且放回

设直到第一次出现重复时取了 X 次球。

则 $X=2,3,4,\cdots,N+1$

$X=k$ 时，共有 N^k 种情况

若第 k 次才出现重复，则代表前 $(k-1)$ 次均不相同，第 k 次与前 $(k-1)$ 次的某一次相同

共有 $N\cdot(N-1)\cdot\cdots\cdot(N-k+2)\cdot\binom{k-1}{1}=(N)_{k-1}\cdot(k-1)$

故 $P(X=k)=\dfrac{(N)_{k-1}\cdot(k-1)}{N^k}$

根据概率的归一化，$\sum_{k=2}^{N+1}P(X=k)=\sum_{k=2}^{N+1}\dfrac{(N)_{k-1}\cdot(k-1)}{N^k}=1$

用 k 替换 $(k-1)$ ~~令 n=k-1~~，则 $\sum_{k=2}^{N+1}\dfrac{(N)_{k-1}\cdot(k-1)}{N^k}=\sum_{k=1}^{N}\dfrac{(N)_k\cdot k}{N^{k+1}}=1$，

$\therefore \sum_{k=1}^{N}\dfrac{(N)_k\cdot k}{N^{k+1}}=1$，$N\ge 2$