吴诗非 20700|0389

P197

18. $\sum_{n=1}^{\infty} n p_n - \sum_{n=1}^{\infty} r_n = \sum_{n=1}^{\infty} n(r_n - r_{n+1}) - \sum_{n=1}^{\infty} r_n$

$= \sum_{n=1}^{\infty} (n-1) r_n - \sum_{n=1}^{\infty} n r_{n+1}$

$= (1-1) r_1 + \sum_{n=2}^{\infty} (n-1) r_n - \sum_{n=1}^{\infty} n r_{n+1}$

$= \sum_{n=1}^{\infty} n r_{n+1} - \sum_{n=1}^{\infty} n r_{n+1}$

$= 0$

故 $\sum_{n=1}^{\infty} n p_n = \sum_{n=1}^{\infty} r_n$

$E(X) = \sum_{n=1}^{\infty} n p_n = \sum_{n=1}^{\infty} r_n = \sum_{n=1}^{\infty} P(X \geq n)$

20. 记 $Y = \min\{X_1, X_2, \cdots, X_m\}$

$E(Y) = \sum_{n=1}^{\infty} P(Y \geq n)$

$P(Y \geq n) = P(X_1 \geq n, X_2 \geq n, \cdots, X_m \geq n)$

由于 $X_1, X_2, \cdots, X_m$ 是独立的;

故 $P(Y \geq n) = P(X_1 \geq n) P(X_2 \geq n) \cdots \cdot P(X_m \geq n) = r_n \cdot r_n \cdot \cdots \cdot r_n = r_n^m$

故 $E(Y) = \sum_{n=1}^{\infty} r_n^m$

21. $F_X(u) = \int_{-\infty}^{u} f(t) dt$

$F_X(u) + r(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt = 1$，故 $r(u) = 1 - F_X(u)$

$\because F_X(u) = P(X \leq u)$

$\therefore r(u) = 1 - P(X \leq u) = P(X \geq u)$

故 $\int_0^{\infty} P(X \geq u) du = \int_0^{+\infty} r(u) du = \int_0^{+\infty} \cancel{1 - F_X(u) du \, u r(u)} \Big|_{u=0}^{u \to +\infty}$

$= \lim_{A \to +\infty} \left[u r(u) \Big|_{u=0}^{u=A} - \int_0^A u r'(u) du \right]$

$= 0 + \int_0^{+\infty} u f(u) du$

$= \int_0^{+\infty} u f(u) du$

由于 X 非负，故 $E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} u f(u) du = \int_0^{+\infty} u f(u) du$

22. $f(t) = \lambda e^{-\lambda t} \quad (t \ge 0)$

$$E(X) = \int_0^{+\infty} t f(t) dt = \int_0^{+\infty} \lambda t e^{-\lambda t} dt = -(t+\frac{1}{\lambda}) e^{-\lambda t} \Big|_0^{+\infty} = \frac{1}{\lambda}$$

$$r(u) = \int_u^{+\infty} f(t) dt = \int_u^{+\infty} \lambda e^{-\lambda t} dt = e^{-\lambda u} \quad (u \ge 0)$$

$$r(u) = \begin{cases} e^{-\lambda u}, & u \ge 0 \\ 1, & u < 0 \end{cases}$$

$$\int_0^{+\infty} r(u) du = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda u} du = -\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda u} \Big|_0^{+\infty} = \frac{1}{\lambda}$$

故 $E(X) = \int_0^{+\infty} r(u) du = \frac{1}{\lambda}$

23.

$$E(T) = \int_0^{+\infty} P(T \ge t) dt = a \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} dt + (1-a) \int_0^{+\infty} e^{-\mu t} dt$$

$$= \frac{a}{\lambda} + \frac{1-a}{\mu}$$

$$P(T^2 \ge t) = P(T \ge \sqrt{t}) + P(T \le -\sqrt{t}), \quad P(T \le -\sqrt{t}) = 0$$

$$= a e^{-\lambda \sqrt{t}} + (1-a) e^{-\mu \sqrt{t}}$$

故 $E(T^2) = \int_0^{+\infty} P(T^2 \ge t) dt = \int_0^{+\infty} a e^{-\lambda \sqrt{t}} + (1-a) e^{-\mu \sqrt{t}} dt$

令 $s = \sqrt{t}$, $ds = \frac{1}{2\sqrt{t}} dt = \frac{1}{2s} dt$, $dt = 2s ds$

$$LHS = 2a \int_0^{+\infty} s e^{-\lambda s} ds + 2(1-a) \int_0^{+\infty} s e^{-\mu s} ds$$

$$= 2a \left(-\frac{\lambda s+1}{\lambda^2} e^{-\lambda s}\right) \Big|_0^{+\infty} + 2(1-a) \left(-\frac{\mu s+1}{\mu^2} e^{-\mu s}\right) \Big|_0^{+\infty}$$

$$= \frac{2a}{\lambda^2} + \frac{2(1-a)}{\mu^2}$$

$$\sigma^2(T) = E(T^2) - [E(T)]^2 = \frac{2a}{\lambda^2} + \frac{2(1-a)}{\mu^2} - \left(\frac{a}{\lambda} + \frac{1-a}{\mu}\right)^2$$

24. 设可以再用 Y 小时，$Y \in [0, +\infty)$，已经用了 X 小时

$\cancel{P(Y \geq u) = \frac{P(Y \geq u, X \geq n)}{P(X \geq}}$ $f(t) = \lambda e^{-\lambda t}$ 是 X 的密度函数

$$P(Y \geq u \mid X \geq n) = \frac{P(Y \geq u, X \geq n)}{P(X \geq n)} = \frac{P(X \geq u+n)}{P(X \geq n)} = \frac{\int_{u+n}^{+\infty} \lambda e^{-\lambda t} dt}{\int_{n}^{+\infty} \lambda e^{-\lambda t} dt} = \frac{e^{-\lambda(u+n)}}{e^{-\lambda n}} = e^{-\lambda u}$$

$$E(Y \mid X \geq n) = \int_0^{+\infty} P(Y \geq u \mid X \geq n) du$$

$$= \int_0^{+\infty} e^{-\lambda u} du$$

$$= \frac{1}{\lambda}$$

无论是否已经用了多长时间，接着能用时间的期望总是 $\frac{1}{\lambda}$

29. 记每次选到的点分别为 $X_1, X_2, \cdots, X_n$，$X_j \in [0, 1]$，$1 \leq j \leq n$

$Y = \max\{X_1, \cdots, X_n\}$，$Z = \min\{X_1, \cdots, X_n\}$

X_j 的生成函数 $F_{X_j} = u$，$1 \leq j \leq n$，$0 \leq u \leq 1$

$F_Y(u) = P(Y \leq u) = P(X_1 \leq u, X_2 \leq u, \cdots, X_n \leq u)$

由于 $X_1, \cdots, X_n$ 是独立的

故 $F_Y(u) = [P(X_j \leq u)]^n = u^n \quad 0 \leq u \leq 1$

$f_Y(u) = F_Y'(u) = n u^{n-1}$

$$E(Y) = \int_0^1 u f_Y(u) du = \int_0^1 n u^n du = \frac{n}{n+1} u^{n+1} \Big|_0^1 = \frac{n}{n+1}$$

$$P(Z \geq u) = P(X_1 \geq u, X_2 \geq u, \cdots, X_n \geq u) = [P(X_j \geq u)]^n = (1-u)^n$$

$$E(Z) = \int_0^1 P(Z \geq u) du = \int_0^1 (1-u)^n du = \int_0^1 t^n dt = \frac{1}{n+1} t^{n} \Big|_0^1 = \frac{1}{n+1}$$

区间长度 $T = Y - Z$，故 $E(T) = E(Y) - E(Z) = \frac{n-1}{n+1}$

33. 对 $\forall\ 1\le j\le n$，X_j 的生成函数 $g_j(z)=\frac{1}{4}z^{-1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}z$

$\{X_j\}$相互独立 则 S_n 生成函数 $g(z)=g_1(z)\cdot\cdots\cdot g_n(z)=(\frac{1}{4}z^{-1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}z)^n$

$P(S_n=0)$ 是 $g(z)$ 中常数项

$$g(z)=\left(\frac{1}{4z}+\frac{1}{2}+\frac{z}{4}\right)^n=\left(\frac{1+2z+z^2}{4z}\right)^n=\frac{(z+1)^{2n}}{4^n z^n}$$

$(z+1)^{2n}$ 中 z^n 前系数 $\binom{2n}{n}$

故 $P(S_n=0)=\dfrac{\binom{2n}{n}}{4^n}$

设 A, B 掷硬币掷出字面~~概率~~次数 Y_1、Y_2

$$P(Y_j=k)=\binom{n}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^k\left(\frac{1}{2}\right)^{n-k}=\frac{\binom{n}{k}}{2^n}\qquad j=1\text{或}2$$

Y_1 生成函数 $h_1(z)=\sum_{k=0}^{n}\dfrac{\binom{n}{k}}{2^n}z^k=\dfrac{(z+1)^n}{2^n}$

$-Y_2$ 生成函数 $h_2(z)=\sum_{k=0}^{n}\dfrac{\binom{n}{k}}{2^n}z^{-k}=\dfrac{(\frac{1}{z}+1)^n}{2^n}$

令 $Z=Y_1-Y_2$，Z生成函数 $h(z)=h_1(z)h_2(z)=\dfrac{(1+z)^{2n}}{4^n z^n}$

常数项为 $\dfrac{\binom{2n}{n}}{4^n}$，代表 $P(Z=0)$ 即 $P(Y_1=Y_2)$ 的概率

37. (1) $\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\lambda u}f(u)du=\int_0^c\frac{1}{c}e^{-\lambda u}du=\frac{1}{c\lambda}e^{-\lambda u}\Big|_c^0=\frac{1-e^{-\lambda c}}{\lambda c}\qquad(\lambda>0)$

(2) $\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\lambda u}f(u)du=\int_0^c\frac{2ue^{-\lambda u}}{c^2}du=\frac{2(\lambda u+1)e^{-\lambda u}}{c^2\lambda^2}\Big|_c^0=\frac{2[1-(\lambda c+1)e^{-\lambda c}]}{\lambda^2c^2}\qquad(\lambda>0)$

(3) $\int_{-\infty}^{+\infty}f(u)du=\int_0^{+\infty}\frac{\lambda^n u^{n-1}}{(n-1)!}e^{-\lambda u}du$

$$=\lim_{A\to+\infty}-\frac{\lambda^{n-1}u^{n-1}}{(n-1)!}e^{-\lambda u}\Big|_{u=0}^{u=A}+\int_0^{+\infty}\frac{\lambda^{n-1}u^{n-1}}{(n-2)!}e^{-\lambda u}du$$

$$=\int_0^{+\infty}\frac{\lambda^{n-1}u^{n-1}}{(n-2)!}e^{-\lambda u}du$$

~~令 a_n~~ 令 $I_n=\int_0^{+\infty}f(u)du$，可得 $I_n=I_{n-1}=\cdots=I_1=\int_0^{+\infty}\lambda e^{-\lambda u}du=1$

故 $\int_{-\infty}^{+\infty}f(u)du=1$，$f(u)$ 是密度函数

$$T(s)=\int_0^{+\infty} e^{-su} f(u)du = \int_0^{+\infty} \frac{\lambda^n u^{n-1}}{(n-1)!} e^{-(\lambda+s)u} du$$

$$= \frac{\lambda^n}{(\lambda+s)^n} \int_0^{+\infty} \frac{(\lambda+s)^n u^{n-1}}{(n-1)!} e^{-(\lambda+s)u} du$$ ，积分是密度的积分，结果为1

$$= \frac{\lambda^n}{(\lambda+s)^n}$$

38. T_i的密度 $f(t) = \lambda e^{-\lambda t}$

$$\int_0^{+\infty} e^{-st} f(t) dt = \lambda \int_0^{+\infty} e^{-(s+\lambda)t} dt$$

$$= \frac{\lambda}{\lambda+s} \int_0^{+\infty} (\lambda+s) e^{-(s+\lambda)t} dt$$ ，积分是密度的积分，结果为1

$$= \frac{\lambda}{\lambda+s}$$

S_n的生成函数的 T_i的乘积

故 S_n的拉普拉斯变换 $T(s) = \frac{\lambda^n}{(\lambda+s)^n}$ ，与上题相同

扫描全能王 创建