20200103389 吴诗非

P195

2. 记X表示每张彩票获得的奖金，X=0, 25, 250, 2500, 50000

X	0	25	250	2500	50000
P	$\frac{9}{1000}$	$\frac{9}{10^4}$	$\frac{9}{10^5}$	$\frac{9}{10^6}$	$\frac{1}{10^6}$

$$E(X) = 0\times\frac{9}{10^3} + 25\times\frac{9}{10^4} + 250\times\frac{9}{10^5} + 2500\times\frac{9}{10^6} + 50000\times\frac{1}{10^6}$$
$$= \frac{1175}{10^4} = \frac{47}{400}$$

若只卖了80%的彩票，所支付奖金总额期望 $80\%\times10^6\times\frac{1175}{10^4} = 94000$ 美元

获得利润期望 $80\%\times10^6\times(\frac{1}{2}-\frac{47}{400}) = 306000$(美元)

3. 记X_i表示从第i个街区里选出的黑人数量，

$X_i=0,1,2$　共有$\binom{w_i+b_i}{2}$种情况，$X_i=k$有$\binom{w_i}{2-k}\binom{b_i}{k}$种情况

$$P(X_i=0)=\frac{\binom{w_i}{2}\binom{b_i}{0}}{\binom{w_i+b_i}{2}}\quad P(X_i=1)=\frac{\binom{w_i}{1}\binom{b_i}{1}}{\binom{w_i+b_i}{2}}\quad P(X_i=2)=\frac{\binom{w_i}{0}\binom{b_i}{2}}{\binom{w_i+b_i}{2}}$$

其中w_i、b_i分别表示第i个街区里白人和黑人的数量

$$E(X_i) = \frac{\binom{w_i}{1}\binom{b_i}{1}}{\binom{w_i+b_i}{2}} + 2\cdot\frac{\binom{b_i}{2}}{\binom{w_i+b_i}{2}} = \frac{2b_i}{w_i+b_i}$$

记X表示选出黑人的总数，$X = X_1+X_2+X_3+X_4+X_5$

$$E(X) = E(X_1)+E(X_2)+E(X_3)+E(X_4)+E(X_5)$$
$$= \frac{6}{13}+\frac{4}{12}+\frac{8}{13}+\frac{6}{14}+\frac{8}{14}$$
$$= \frac{94}{39}$$

4. 记第i个骰子掷一次点数为X_i，$X_i=1,2,3,4,5,6$

6个骰子点数总和$X=X_1+X_2+X_3+X_4+X_5+X_6$

X_i	1	2	3	4	5	6
P	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

故 $E(X_i)=\frac{1}{6}(1+2+3+4+5)=\frac{7}{2}$

$E(X)=6E(X_1)=6\times\frac{7}{2}=21$

$D(X)=E(X^2)-E^2(X)$

$E(X^2)=E((X_1+X_2+X_3+X_4+X_5+X_6)^2)$，其中 $E(X_iX_j)=E(X_1X_2)$, $1\le i\ne j\le 6$

$=6E(X_i^2)+30E(X_1X_2)$

X_i^2	1	4	9	16	25	36
P	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

$E(X_i^2)=\frac{1}{6}(1+4+9+16+25+36)=\frac{91}{6}$

$E(X_1X_2)=\frac{1}{36}(1+2+3+4+5+6)(1+2+3+4+5+6)=\frac{21^2}{36}$

故 $D(X)=6E(X_i^2)+30E(X_1X_2)-36E^2(X_1)$

$=6\times\frac{91}{6}+30\times\frac{21^2}{36}-21^2$

$=\frac{35}{2}$

5. 有10个螺栓严重故障，50个螺栓轻微故障

记严重故障的有X个，轻微故障的有Y个，X、Y均满足超几何分布

$X=0,1,2,\cdots,10$；$Y=0,1,2,\cdots,50$

$P(X=k)=\frac{\binom{990}{50-k}\binom{10}{k}}{\binom{1000}{50}}$ $P(Y=k)=\frac{\binom{950}{50-k}\binom{50}{k}}{\binom{1000}{50}}$

$E(X)=\sum_{k=0}^{10}kP(X=k)=\frac{10\times50}{1000}=0.5$

$E(Y)=\sum_{k=0}^{50}kP(Y=k)=\frac{50\times50}{1000}=2.5$

6. 记X表示手里黑桃的数量

$X=0,1,2,\cdots,13$，X服从超几何分布，共有$\binom{52}{13}$种情况，$X=k$有$\binom{13}{k}\binom{39}{13-k}$种情况

$$P(X=k)=\frac{\binom{13}{k}\binom{39}{13-k}}{\binom{52}{13}}$$

$$E(X)=\sum_{k=0}^{8}k\cdot P(X=k)=\frac{13\cdot 13}{52}=\frac{13}{4}$$

记X_i表示手里是否有第i种花色$(i=1,2,3,4)$，有则$X_i=1$，无则$X_i=0$

~~P(Xi=0)~~ 共有$\binom{52}{13}$种情况，$X_i=0$有$\binom{39}{13}$种情况

$$P(X_i=0)=\frac{\binom{39}{13}}{\binom{52}{13}},\quad P(X_i=1)=1-\frac{\binom{39}{13}}{\binom{52}{13}}$$

$$E(X_i)=0\times\frac{\binom{39}{13}}{\binom{52}{13}}+1\times\left[1-\frac{\binom{39}{13}}{\binom{52}{13}}\right]=1-\frac{\binom{39}{13}}{\binom{52}{13}}$$

$$E(X_1+X_2+X_3+X_4)=4E(X_i)=4\left[1-\frac{\binom{39}{13}}{\binom{52}{13}}\right]$$

7. 记A={没有人从第3站下车}

共有7^{25}种情况，A有6^{25}种情况

$$P(A)=\frac{6^{25}}{7^{25}}$$

记X_i表示是否有人从第i站下车$(i=1,2,\cdots,7)$

有则$X_i=1$，无则$X_i=0$

共有7^{25}种情况，$X_i=0$有6^{25}种情况

$$P(X_i=0)=\frac{6^{25}}{7^{25}},\quad P(X_i=1)=1-P(X_i=0)=1-\frac{6^{25}}{7^{25}}$$

$$E(X_i)=0\times\frac{6^{25}}{7^{25}}+1\times\left(1-\frac{6^{25}}{7^{25}}\right)=1-\frac{6^{25}}{7^{25}}$$

$$E(X_1+X_2+\cdots+X_7)=7E(X_i)=7\left(1-\frac{6^{25}}{7^{25}}\right)$$

11. 记X表示相邻两次调整之间生产出好产品的个数

则 $X=0,1,2,\cdots$，记 $p=0.02$. 需要生产X个好产品和1个次品，每次生产相互独立

$P(X=n)=$ ~~$p(1-p)^n\cdot p$~~ $p(1-p)^n$

$E(X)=\sum_{n=0}^{\infty} n P(X=n) = \sum_{n=0}^{\infty} np(1-p)^n = \frac{1-p}{p} = 49$

12. 记X表示第X次才能打开门

则 $X=1,2,3,4,5,6$

共有6!种情况，$X=1、2、3、4、5、6$ 分别有5!种情况

故 $P(X=n)=\frac{5!}{6!}=\frac{1}{6}$，$n=1,2,3,4,5,6$

$E(X)=\sum_{n=1}^{6} nP(X=n) = \frac{1+2+3+4+5+6}{6} = \frac{7}{2}$

15.(1) 设需要抽X次才能抽到与第一次相同的奖券

$X=2,3,4,\cdots$

每次抽到与第一张相同的概率是相等的，均为 $\frac{1}{N}$

故 $P(X=k)=(1-\frac{1}{N})^{k-2}\cdot\frac{1}{N}$

$E(X)=\sum_{k=2}^{\infty}\frac{k}{N}\cdot(1-\frac{1}{N})^{k-2} = N+1$

(2) 设需要抽Y次会出现第一次重复

$Y=2,3,4,\cdots,N+1$

~~$P(Y=2)=\frac{1}{N}$, $P(Y=3)=1-\frac{1}{N}$~~

$Y=2$，则第2次与第1次相同，$P(Y=2)=\frac{1}{N}$

$Y=3$，则第2次与第1次不同，第3次与前2次之一相同，$P(Y=3)=(1-\frac{1}{N})\frac{2}{N}$

...

$Y=k$，前 $k-1$ 次互不相同，第k次出现重复

共有 N^k 种情况，$Y=k$ 有 $(k-1)!\binom{N}{k-1}\cdot\binom{k-1}{1}$ 种情况

故 $P(Y=k)=\frac{N!}{(N-k+1)!}\cdot\frac{k-1}{N^k} = \frac{(N)_{k-1}\cdot(k-1)}{N^k}$

$E(Y)=\sum_{k=2}^{N+1} kP(Y=k) = \sum_{k=2}^{N+1}\frac{N!}{(N-k+1)!}\cdot\frac{k(k-1)}{N^k} = \sum_{k=2}^{N+1} k(k-1)\cdot\frac{(N)_{k-1}}{N^k}$