

吴诗非

2020/10/389

11. 记  $A = \{ \text{在 } [0, 1] \text{ 上取一实数大于 } \frac{1}{4} \}$ ,  $B = \{ \text{在 } [0, 1] \text{ 上取一实数小于 } \frac{3}{4} \}$

$P(A \cap B) = \frac{1}{4}$   $P(A) = P(B) = \frac{3}{4}$

$\therefore P(A \cap B) < P(A) P(B) = \frac{9}{16}$

12. 对  $\forall x \in (A \cup B) - A$ , 有  $x \in A \cup B$  但  $x \notin A$

即  $x \in B$  且  $x \notin A$

$\therefore A \cap B \subset A$

$\therefore x \notin A \cap B$

$\therefore x \in B \setminus (A \cap B) = B - A \cap B$

$\therefore (A \cup B) - A \subset B - (A \cap B)$

对  $\forall x \in B - A \cap B$ , 有  $x \in B$  但  $x \notin A \cap B$

$\therefore x \notin A$

$\therefore B \subset A \cup B$

$\therefore x \in A \cup B$

$\therefore x \in (A \cup B) \setminus A = (A \cup B) - A$

$\therefore B - (A \cap B) \subset (A \cup B) - A$

综上,  $(A \cup B) - A = B - (A \cap B)$

$\therefore A \subset A \cup B, A \cap B = B$

$\therefore P((A \cup B) - A) = P(B - (A \cap B))$

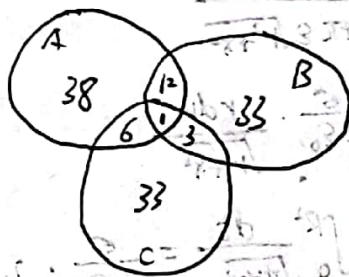
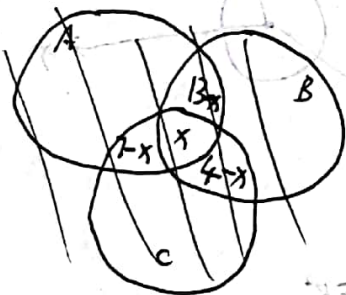
$P(A \cup B) - P(A) = P(B) - P(A \cap B)$

$P(A \cup B) + P(A \cap B) = P(A) + P(B)$

B.

共有  $123 + 78 - 184 = 17$  个数被 A, B 共有

14.



$38 + 33 + 33 + 12 + 3 + 6 + 1 = 126$



扫描全能王 创建

22.  $A_i = \{\text{任取一数被 } i \text{ 整除}\}$

\*  $P(A_3^c A_4^c A_6^c (A_2 \cup A_5))$  即可

$$P(A_3^c A_4^c A_6^c (A_2 \cup A_5)) = P(A_3^c A_4^c A_6^c A_2) + P(A_3^c A_4^c A_6^c A_5) - P(A_3^c A_4^c A_6^c A_2 A_5)$$

$$P(A_3^c A_4^c A_6^c A_2) = \frac{20}{120} = \frac{1}{6}$$

$$P(A_3^c A_4^c A_6^c A_5) = \frac{10}{120} = \frac{1}{12}$$

$$P(A_3^c A_4^c A_6^c A_2 A_5) = \frac{4}{120} = \frac{1}{30}$$

$$P(A_3^c A_4^c A_6^c (A_2 \cup A_5)) = \frac{20}{120} + \frac{10}{120} - \frac{4}{120} = \frac{26}{120} = \frac{13}{60}$$

25.  $A, B$  独立 则  $P(A \cap B) = P(A)P(B)$

$$A = \Omega - A^c, \quad P((\Omega - A^c)B) = P(\Omega - A^c)P(B)$$

$$P(B - A^c B) = P(B) - P(A^c B)$$

$$P(B) - P(A^c B) = P(B) - P(A^c)P(B)$$

$$\text{即 } P(A^c B) = P(A^c)P(B), \text{ 得证}$$

$$\text{同理, } P(AB^c) = P(A)P(B^c), \quad P(A^c B^c) = P(A^c)P(B^c)$$

对于  $A, B, C$ , 有  $P(AB) = P(A)P(B)$ ,  $P(BC) = P(B)P(C)$ ,  $P(CA) = P(C)P(A)$   
 $P(ABC) = P(A)P(B)P(C)$

下证  $A^c$  与  $B, C$  独立,  $A = \Omega - A^c$

$$P(A^c B) = P(A^c)P(B), \quad P(A^c C) = P(A^c)P(C) \text{ 已经验证过成立}$$

只需证  $P(A^c BC) = P(A^c)P(B)P(C)$

又  $\because P(BC) = P(B)P(C)$ , 记  $D = BC$

则证  $P(A^c D) = P(A^c)P(D)$  即可, 而这一条上面已经验证过成立

综上,  $(A^c, B, C)$  独立, 同理可得  $(A, B^c, C)$ ,  $(A, B, C^c)$  都独立



2. (1) 共有  $3 \times 2 = 6$  种可能的情况

(2) 共有  $\binom{3}{2} = 3$  种可能的情况

3. 2个男人买走了3件衬衫(可以一件不买), 问有多少种买法?  $2^3$

2个男人买走了3件衬衫(至少买一件), 问有多少种买法?  $\binom{2^3-1}{3}$

5. 使用2或3个字母有  $26^2 + 26^3 = 18252$  种不同的前缀

设字母表至少要有  $x$  个字母, 使得100万人能用三个字母识别

则  $x^3 \geq 1000000$ ,  $x \geq 100$

至少要有100个字母

8. 两两两对共有  $A_4^4 = 4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$  种方法

使男女分别站成一排后交叉插成一排, 则可实现男女交替的一排

此时分为男生排头与女生排头两种情况,

故  $2 \times A_4^4 \times A_4^4 = 2 \times 24 \times 24 = 1152$

12. 尝试丢掉正确钥匙的概率为  $\frac{1}{6}$ , 故仍能开门的概率  $1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$

若想头两次尝试即可进门, 则正确的钥匙要在第一把或第二把

钥匙在第一把共有  $A_4^4 = 4!$  种情况, 在第二把也有  $A_4^4 = 4!$  情况

概率为  $\frac{5}{6} \cdot \frac{2A_4^4}{A_5^5} = \frac{5}{6} \cdot \frac{2}{5} = \frac{1}{3}$



14.

(1) 骰子之间是不同的

对于每一个骰子,前后两次出现相同点数的概率均为  $\frac{1}{6}$

则三个骰子均相同概率  $(\frac{1}{6})^3 = \frac{1}{216}$

(2) 骰子之间是相同的

~~第一次投骰子共有  $6^3 = 216$  种情况, 设~~

①若第一次得到的点数均不相同, 共有  $6 \times 5 \times 4 = 120$  种情况

概率  $\frac{120}{216} = \frac{5}{9}$ ,

第二次和第一次一样的概率  $\frac{5}{9} \times \frac{3}{6} \times \frac{2}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{5}{720} = \frac{5}{216}$

②若第二次得到点数有两个相同, 共有  $6 \times 5 \times 3 = 90$  种情况

第二次和第一次一样的概率  $\frac{90}{216} \times \frac{3}{216} = \frac{5}{216}$

③若第一次得到点数均相同, 共有 6 种情况

第二次和第一次一样的概率  $\frac{6}{216} \times \frac{6}{216} = \frac{6}{1296} = \frac{1}{216}$

综上, 总概率为  $\frac{720+270+6}{216^2} = \frac{83}{3888}$

16. 总共有  $C_{10}^4 = \binom{10}{4}$  种可能

考虑反面情况, 4只鞋子一对也没有, 共  $\binom{5}{4} \cdot 2^4 = 80$  种可能

4只鞋子中至少有一对的概率为  $1 - \frac{\binom{5}{4} \cdot 2^4}{\binom{10}{4}} = 1 - \frac{80}{210} = \frac{13}{21}$

