吴诗非 2020010389

11. 记 $A=\{$在 $[0,1]$ 上取一实数大于 $\frac{1}{4}\}$，$B=\{$在 $[0,1]$ 上取一实数小于 $\frac{3}{4}\}$

$P(AB)=\frac{1}{2}$ $P(A)=P(B)=\frac{3}{4}$

$\therefore P(AB) < P(A)P(B)=\frac{9}{16}$

12. 对 $\forall x\in(A\cup B)-A$，有 $x\in A\cup B$ 但 $x\notin A$

即 $x\in B$ 且 $x\notin A$

$\because A\cap B\subset A$

$\therefore x\notin A\cap B$

$\therefore x\in B\setminus(A\cap B)=B-A\cap B$

$\therefore (A\cup B)-A\subset B-(A\cap B)$

对 $\forall x\in B-A\cap B$，有 $x\in B$ 但 $x\notin A\cap B$

$\therefore x\notin A$

$\because B\subset A\cup B$

$\therefore x\in A\cup B$

$\therefore x\in(A\cup B)\setminus A=(A\cup B)-A$

$\therefore B-(A\cap B)\subset(A\cup B)-A$

综上，$(A\cup B)-A=B-(A\cap B)$

$\because A\subset A\cup B$，$A\cap B\subset B$

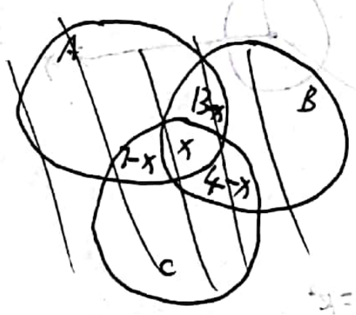
$\therefore P((A\cup B)-A)=P(B-(A\cap B))$

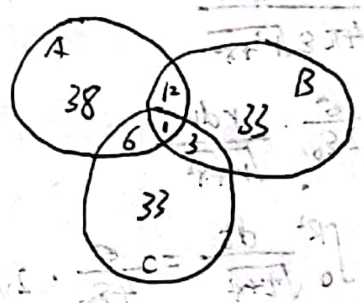
$P(A\cup B)-P(A)=P(B)-P(A\cap B)$

$P(A\cup B)+P(A\cap B)=P(A)+P(B)$

13. 共有 $123+78-184=17$ 个数被A、B共有

14.





$38+33+33+12+3+6+1=126$

22. $A_i=\{$~~这个~~任取一数被 i 整除$\}$

求 $P(A_3^cA_4^cA_6^c(A_2\cup A_5))$ 即可

$$P(A_3^cA_4^cA_6^c(A_2\cup A_5))=P(A_3^cA_4^cA_6^cA_2)+P(A_3^cA_4^cA_6^cA_5)-P(A_3^cA_4^cA_6^cA_2A_5)$$

$$P(A_3^cA_4^cA_6^cA_2)=\frac{20}{120}=\frac{1}{6}$$

$$P(A_3^cA_4^cA_6^cA_5)=\frac{10}{120}=\frac{1}{12}$$

$$P(A_3^cA_4^cA_6^cA_2A_5)=\frac{4}{120}=\frac{1}{30}$$

$$P(A_3^cA_4^cA_6^c(A_2\cup A_5))=\frac{20}{120}+\frac{10}{120}-\frac{4}{120}=\cancel{\frac{13}{60}}\ \frac{13}{60}$$

25. A，B 独立 则 ~~$P(A)$~~ $P(A\cap B)=P(A)P(B)$

$A=\Omega-A^c$， $P((\Omega-A^c)B)=P(\Omega-A^c)P(B)$

$P(B-A^cB)=P(B)-P(A^c)P(B)$

$P(B)-P(A^cB)=P(B)-\cancel{P(A^cB)}\ P(A^c)P(B)$

即 $P(A^cB)=P(A^c)P(B)$，得证

同理，$P(AB^c)=P(A)P(B^c)$，$P(A^cB^c)=P(A^c)P(B^c)$

对于 A、B、C，有 $P(AB)=P(A)P(B)$，$P(BC)=P(B)P(C)$，$P(CA)=P(C)P(A)$

$P(ABC)=P(A)P(B)P(C)$

下证 A^c 与 B、C 独立，$A=\Omega-A^c$

$P(A^cB)=P(A^c)P(B)$、$P(A^cC)=P(A^c)P(C)$ 已经验证过成立

只需证 $P(A^cBC)=P(A)P(B)P(C)$

又 $\because$ $P(BC)=P(B)P(C)$，~~设~~ 记 $D=BC$

则证 $P(A^cD)=P(A^c)P(D)$ 即可，而这一条上面已经验证过成立

综上，(A^c,B,C) 独立，同理可得 (A,B^c,C)，(A,B,C^c) …… 都独立

2. (1) 共有 $3\times2=6$ 种可能的情况

(2) 共有 $\binom{3}{2}=3$ 种可能的情况

3. 2个男人买走了3件衬衫(可以一件不买)，问有多少种买法？ 2^3

2个男人买走了3件相同的衬衫(至少买一件)，问有多少种买法？ $\binom{2+3-1}{3}$

5. 使用2或3个字母有 $26^2+26^3=18252$ 种不同的前缀

设字母表至少要有 x 个字母，使得100万人能用三个字母识别

则 $x^3\geq1000000$ ，$x\geq100$

至少要有100个字母

8. 两两配对共有 $A_4^4=4!=4\times3\times2\times1=24$ 种方法

使男女分别站成一排后交插成为一排，则可实现男女交替的一排

此时分为男生排头与女生排头两种情况，

故 $2\times A_4^4\times A_4^4=2\times24\times24=1152$

12. 丢掉正确钥匙的概率：$\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$，故有 $1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$ 的概率进门

在可以开门的情况下，头两把钥匙就把门打开的情况有3!种

$P=\frac{2}{3}\times\frac{3!}{5!}=\frac{1}{30}$

14.

(1) 骰子之间是不同的

对于每一个骰子，前后两次出现相同点数的概率均为 $\frac{1}{6}$

则三个骰子均相同概率 $(\frac{1}{6})^3=\frac{1}{216}$

(2) 骰子之间是相同的

~~第一次投骰子共有 $6^3=216$ 种情况，设~~

①若第一次得到的点数均不相同，共有 $6\times5\times4=120$ 种情况

概率 $\frac{120}{216}=\frac{5}{9}$，

第二次和第一次一样的概率 $\frac{5}{9}\times\frac{3}{6}\times\frac{2}{6}\times\frac{1}{6}=\frac{720}{216^2}$

②若第一次得到点数有两个相同，共有 $6\times5\times3=90$ 种情况

第二次和第一次一样的概率 $\frac{90}{216}\times\frac{3}{216}=\frac{270}{216^2}$

③若第一次得到点数均相同，共有 6种种况

第二次和第一次一样的概率 $\frac{6}{216}\times\frac{1}{216}=\frac{6}{216^2}$

综上，总概率为 $\frac{720+270+6}{216^2}=\frac{83}{3888}$

16. 总共有 $C_{10}^4=\binom{10}{4}$ 种可能

考虑反面情况，4只鞋子一对也没有，共 $\binom{5}{4}\cdot2^4=80$ 种可能

4只鞋子中至少有一对的概率为 $1-\frac{\binom{5}{4}\cdot2^4}{\binom{10}{4}}=1-\frac{80}{210}=\frac{13}{21}$